



# Approche de reconstruction d'images fondée sur l'inversion de certaines transformations de Radon généralisées

Rémi Regnier

## ► To cite this version:

Rémi Regnier. Approche de reconstruction d'images fondée sur l'inversion de certaines transformations de Radon généralisées. Imagerie médicale. Université de Cergy Pontoise, 2014. Français. NNT : 2014CERG0698 . tel-01152920

**HAL Id: tel-01152920**

**<https://theses.hal.science/tel-01152920>**

Submitted on 18 May 2015

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



ECOLE DOCTORALE SCIENCES ET INGÉNIERIE  
de l'Université de Cergy-Pontoise

Manuscrit de thèse pour l'obtention du titre de docteur en Sciences et Technologies  
de l'Information et de la Communication

---

**APPROCHE DE RECONSTRUCTION D'IMAGES FONDÉE  
SUR L'INVERSION DE CERTAINES TRANSFORMATIONS  
DE RADON GÉNÉRALISÉES**

---

par

RÉMI REGNIER

ETIS - ENSEA / Université de Cergy-Pontoise / CNRS UMR 8051  
6 avenue du Ponceau, 95014 Cergy-Pontoise, France

18 juin 2014

Devant le jury composé de

M.	Jocelyn Chanussot	Pr. INP Grenoble & IUF	Rapporteur
M.	Ali Mohammad-Djafari	Directeur de recherche CNRS, Laboratoire des signaux et systèmes - UMR 8506	Rapporteur
M.	François Le Chevalier	Pr. Delft University of Technology & Thales Air Systems	Examineur
Mme.	Véronique Serfaty	Responsable Domaine Ingénierie de l'Information & Robotique, DGA	Examineur
Mme.	Maï. K. Nguyen-Verger	Pr. Université de Cergy-Pontoise	Directeur de thèse
M.	Christian Faye	Maître de conférences HDR, ENSEA	Membre invité



---

## Remerciements

---

Je voudrais dans un premier temps remercier ma directrice de thèse Maï Nguyen et le support financier de la Direction Générale de l'Armement (DGA) et de l'université de Cergy Pontoise sans qui cette thèse n'aurait pas pu voir le jour.

J'aimerais aussi exprimer toute ma reconnaissance à l'équipe de recherche du laboratoire ETIS pour leur accueil, leurs conseils et leur disponibilité durant ces quelques années. Je tiens à remercier tous les doctorants de ce laboratoire pour leur amitié, leur soutien, leur passion pour les sciences et leur bonne humeur communicative, notamment Romain Tajan, Alan Jule, Laurent Rodriguez, Liang Zhu et Jean-Christophe Sibel.

Je voudrais aussi remercier le professeur Alfred Louis pour son accueil et son aide scientifique lors de mes visites à l'Institute of Applied Mathematics de l'université des Saarlandes.

Je remercie le professeur Jocelyn Chanussot et le directeur de recherche CNRS Ali Mohammad-Djafari de m'avoir fait l'honneur d'être mes rapporteurs. Je remercie également le professeur François Le Chevalier et Mme Véronique Serfaty pour avoir accepté d'être membres de mon jury de thèse et je tiens à remercier vivement les membres du jury ainsi que Christian Faye de l'intérêt qu'ils ont porté à mes travaux de recherche.

Je tiens à remercier ma famille, mon père, ma mère, ma sœur et mes frères ainsi que tous mes amis proches pour leurs encouragements et soutiens.

Enfin je tenais tout particulièrement à remercier Gaël Rigaud pour son amitié indéfectible et sa fructueuse collaboration sur certains travaux de ma thèse.



---

## Résumé

---

Depuis l'invention de la radiographie au début du vingtième siècle et des premiers radars lors la seconde guerre mondiale, le besoin de connaître notre environnement par différentes techniques d'imagerie n'a cessé de croître. Ce besoin a pris de multiples formes, allant de l'exploration d'une structure interne avec la prolifération des techniques d'imagerie non invasives à l'imagerie par satellite qui accompagna la conquête de l'espace. Nombre de systèmes d'imagerie ont donc été proposés pour arriver à créer les images les plus représentatives des milieux étudiés. Parmi eux la tomodesitométrie, ou scanner médical, a connu un succès remarquable depuis son invention. La raison de ce succès vient du fait que son principe de fonctionnement est fondé sur la transformée de Radon (TR) dont l'inversion permet de restituer une image fidèle de l'intérieur du milieu étudié. La TR est une transformée géométrique intégrale, qui intègre une densité physique d'intérêt, le long d'une droite du plan. Il est donc naturel de penser qu'une généralisation de la TR, qui consiste à remplacer la droite, support d'intégration, par une courbe ou par une surface, peut amener à une nouvelle imagerie. Dans cette thèse, nous étudions deux types de transformées de Radon généralisées qui sont définies sur des lignes brisées en V du plan (TRV) et des sphères centrées sur un plan fixe (TRS) ainsi que leurs imageries correspondantes. Les TRV nous permettent de proposer trois nouvelles modalités tomographiques. La première, comme la tomodesitométrie, exploite le phénomène d'atténuation du rayonnement X lors de sa propagation dans un milieu mais utilise aussi le phénomène de réflexion du rayonnement sur une surface impénétrable. La deuxième exploite le phénomène de diffusion Compton du rayonnement émis par un objet. La troisième combine deux modalités d'imageries par transmission et par émission sous la forme d'une imagerie bimodale à partir du rayonnement ionisant diffusé. Cette étude permet non seulement de faire émerger de nouvelles imageries pouvant concurrencer celles existantes mais aussi d'établir de nouveaux algorithmes pour la correction de l'atténuation (un des facteurs physiques dégradant sérieusement la qualité d'image tomographique actuellement).

La TRS est une généralisation connue de la transformée de Radon en trois dimensions. Elle a été proposée comme modèle mathématique de l'imagerie radar à synthèse d'ouverture (RSO). On montre par la construction d'algorithmes appropriés que l'inversion de cette TRS donne une solution efficace à la reconstruction d'images de l'environnement directement en 3D.

La faisabilité théorique de ces nouvelles imageries modélisées par ces deux classes de transformées de Radon généralisées et la performance des algorithmes de reconstruction d'images basés sur les formules d'inversion de ces transformées ouvrent plusieurs perspectives : extension en 3D de l'imagerie bimodale par rayonnement ionisant diffusé, ou possibilité de détection de cibles mobiles en imagerie RSO par introduction d'autres généralisations de la TR. De plus, les méthodes développées dans cette thèse sont susceptibles d'application dans d'autres imageries : imagerie sismique modélisée par la transformée de Radon définie sur des paraboles, imagerie radar Doppler par la TR sur des hyperboles ou encore imagerie thermo-opto-acoustique modélisée par la TR sur des cercles centrés sur un cercle fixe.



---

# Abstract

---

Since the invention of radiography at the beginning of the 20<sup>th</sup> century and of the radar during the second world war, the need of information on our environment is ever increasing. This goes from the exploration of internal structures using numerous non-invasive imaging techniques to satellite imaging which rapidly expands with space exploration. A huge number of imaging systems have been developed to provide faithful images of the objects of interest. Computed Tomography (or the medical scanner) has experienced a tremendous success since it was invented. The reason for this success lies in the fact that its mathematical foundation is the Radon transform (RT), which has an inverse formula allowing the faithful reconstruction of the interior of an object.

The Radon transform is a geometric integral transform which integrates a physical density of interest along a straight line in the plane. It is natural to expect that, when the line is replaced by a curve or a surface as an integration support, new imaging processes may emerge. In this thesis, we study two generalized Radon transforms which are defined on broken lines in the form of a letter V (called V-line RT or VRT) and on spheres centered on a fixed plane (called spherical RT or SRT), as well as their resulting imaging processes. The Radon transforms on V-lines (VRT) form the mathematical foundation of three tomographic modalities. The first modality exploits not only the attenuation of X-rays in traversed matter (as in Computed Tomography) but also the phenomenon of reflection on an impenetrable surface. The second modality makes use of Compton scattering for emission imaging. The third modality combines transmission and emission imaging modalities into a bimodal imaging system from scattered ionizing radiations. This study puts forward new imaging systems which compete with the existing ones and develops new algorithms for attenuation corrections (in emission imaging the attenuation is one of factors degrading seriously tomographic image quality up to now).

The Radon transform on spheres centered on a fixed plane (SRT) is a generalization of the classical Radon transform in three dimensions. It has been proposed as a mathematical model for Synthetic Aperture Radar (SAR) imaging. We show through the setting up of appropriate algorithms that the inversion of the SRT yields an efficient solution to the landscape reconstruction problem, directly in three dimensions.

The theoretical feasibility of these new imaging systems based on generalized Radon transforms and the good performance of inversion algorithms based on inversion formulas open the way to several perspectives : 3D extension of bimodal imaging by scattered radiation or SAR target motion detection through the introduction of other generalized Radon transforms. Moreover the algorithmic methods developed here may serve in other imaging activities such as : seismic with the parabolic Radon transform, Doppler radar with the hyperbolic Radon transform, thermo-opto-acoustic imaging with the Radon transform on circles centered on a fixed circle.





---

## Acronymes

---

ART	Algebraic reconstruction method
CARABAS	Coherent All RAdio BAnd Sensing
CART	Circular-arc Radon transform
CST	Compton scattering tomography
CT	Computed tomography
EQMR	Erreur quadratique moyenne relative
EM	Expectation maximisation
GCC	Generalized Chang Correction algorithm
GIPC	Generalized Iterative Pre-Correction algorithm
IPC	Iterative Pre-Correction algorithm
IRM	Imagerie par résonance magnétique
FFT	Fast Fourier transform
PET	Positron emission tomography
PSF	Point spread function
RSB	Rapport signal sur bruit
RSO	Radar à synthèse d'ouverture
SAR	Synthetic aperture radar
SIRT	Simultaneous iterative reconstruction tomography
SPECT	Single photon emission computed tomography
SVD	Singular value decomposition
TDM	Tomodensitométrie
TR	Transformée de Radon
TRAC	Transformée de Radon sur des arcs de cercle
TRS	Transformée de Radon sphérique
TRV	Transformée de Radon sur des lignes V
$TRV_1$	Première transformée de Radon sur des lignes V étudiée
$TRV_2$	Deuxième transformée de Radon sur des lignes V étudiée
TRVC	Transformée de Radon sur des lignes V composées



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>I Imagerie et transformée de Radon</b>	<b>7</b>
I.1 Reconstruction d'images et problèmes inverses . . . . .	7
I.1.1 Définition d'un problème mal-posé . . . . .	8
I.1.2 Techniques de reconstruction d'images et de régularisation . . . . .	8
I.1.3 Approximation de l'inversion par " <i>mollifieur</i> " . . . . .	10
I.2 Interactions physiques des rayonnements avec la matière . . . . .	11
I.2.1 Modèles de rétrodiffusion . . . . .	11
I.2.2 Interaction des rayonnements ionisants avec la matière . . . . .	12
I.2.3 Atténuation du rayonnement ionisant et section efficace . . . . .	14
I.2.4 Bruit statistique . . . . .	16
I.3 Imagerie par rayonnements ionisants . . . . .	17
I.3.1 Imagerie X et gamma . . . . .	17
I.3.2 Du modèle physique de la tomographie par rayon X à la transformée de Radon . . . . .	21
I.3.3 Techniques de reconstruction d'images par inversion analytique . . . . .	25
I.4 Imagerie radar . . . . .	26
I.4.1 Le radar à synthèse d'ouverture (RSO ou SAR en anglais) . . . . .	27
I.4.2 Algorithme de reconstruction d'image basé sur les équations de Maxwell . . . . .	33
I.5 Conclusion . . . . .	34
<b>II La transformée de Radon sur lignes brisées en forme de lettre V</b>	<b>35</b>
II.1 Application de la TRV en tomographie par transmission-réflexion . . . . .	35
II.1.1 Modélisation de l'imagerie de transmission-réflexion . . . . .	36
II.1.2 Inversion de la transformée de Radon sur des lignes brisées . . . . .	38
II.1.3 Implémentation et résultats . . . . .	40
II.1.4 Compensation du manque de données . . . . .	41
II.2 Application de la TRV en tomographie par émission . . . . .	45
II.2.1 Concept . . . . .	45
II.2.2 Formation d'image . . . . .	45
II.2.3 Reconstruction d'image . . . . .	47
II.2.4 Résultats . . . . .	48
II.3 Application de la TRV en tomographie Compton par émission . . . . .	49
II.3.1 Contexte de la tomographie Compton . . . . .	49
II.3.2 La transformée de Radon sur des lignes brisées composées (TRVC) . . . . .	49
II.3.3 Reconstruction d'image . . . . .	51
II.3.4 Prise en compte d'autres phénomènes physiques dans la TRVC . . . . .	51
II.4 Bimodalité en tomographie Compton . . . . .	52
II.4.1 Le concept d'un nouveau système d'imagerie bimodal . . . . .	53

---

II.4.2	Algorithmes de corrections d'atténuation classiques . . . . .	56
II.4.3	Algorithme de précorrection d'atténuation généralisé (GIPC) . . .	59
II.4.4	Implémentation et résultats . . . . .	63
II.5	Conclusion . . . . .	64
<b>III</b>	<b>Transformée de Radon sphérique et application en Radar</b>	<b>67</b>
III.1	Motivations . . . . .	67
III.1.1	Visée latérale et phénomène de symétrie gauche-droite . . . . .	67
III.1.2	Description du système CARABAS . . . . .	67
III.2	Modélisation par transformée de Radon sphérique . . . . .	69
III.2.1	Modèle de Redding . . . . .	69
III.2.2	Modification du modèle de Redding et inversion de la transformée de Radon sphérique . . . . .	71
III.2.3	Illustration avec un cas particulier : transformée de Radon sphé- rique bidimensionnelle . . . . .	76
III.2.4	Implémentation et résultats . . . . .	76
III.3	Algorithme de reconstruction par inversion approchée . . . . .	85
III.3.1	Calcul du noyau de reconstruction . . . . .	85
III.3.2	Choix du mollifieur . . . . .	86
III.3.3	Implémentation et résultats . . . . .	88
III.4	Conclusion . . . . .	90
	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>95</b>
	<b>Publications</b>	<b>97</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>99</b>

## Table des figures

I.1	Illustration du principe de la diffusion Compton. . . . .	13
I.2	Énergie d'un photon diffusé par effet Compton en fonction de l'angle de diffusion dans les cas du Technétium 99m avec $E_0 = 140$ kev. . . . .	14
I.3	Atténuation du flux d'incidence à travers toutes les sections efficaces pour une section $S$ du flux. . . . .	15
I.4	Géométrie de la section efficace différentielle . . . . .	17
I.5	Exemple de scanner X : dans ce tomographe de quatrième génération, le tube à rayons X émet un faisceau en éventail qui irradie toute la section de l'objet, et tourne à l'intérieur de l'anneau des détecteurs disposés autour de l'objet. . . . .	20
I.6	Système d'imagerie par émission monophotonique. Image formée par les photons primaires (b), et le bruit dû aux photons diffusés (c) et aux photons non absorbés par le collimateur (a). . . . .	21
I.7	Système d'imagerie par PET. . . . .	22
I.8	Principes de la tomographie par rayons X . . . . .	23
I.9	Représentation géométrique et paramétrique de l'acquisition des données suivant une ligne droite . . . . .	24
I.10	Exemple de sinogramme. . . . .	24
I.11	Principe d'un radar monostatique : le rayonnement émis est réfléchi sur la cible et renvoyé vers l'antenne de réception. On mesure le temps de trajet de l'onde pour déterminer la distance et on cherche l'orientation de l'antenne pour laquelle le maximum de d'intensité est atteint pour obtenir l'orientation. . . . .	27
I.12	Principe d'un radar à synthèse d'ouverture. . . . .	28
II.1	Principes de fonctionnement de l'imagerie transmission-réflexion . . . .	36
II.2	(a) Image originale de la fissure sur le barreau. (b) Données issues de l'image originale de la Fig. II.2(a) avec la discrétisation angulaire $\Delta\theta = 0.005$ rad. Sur l'axe des abscisses, nous retrouvons le paramètre $\theta$ et nous avons le paramètre $x_S$ sur l'axe des ordonnées. (c) Reconstruction par rétroprojection filtrée de la fissure avec la discrétisation angulaire $\Delta\theta = 0.005$ rad, nous pouvons notamment voir que les petites structures sont clairement reconstruites. . . . .	41
II.3	(a)Image de la valise originale. (b)Projections de l'image montrée en Fig. II.3(a) avec la discrétisation angulaire $\Delta\theta = 0.005$ rad. Sur l'axe des abscisses, nous retrouvons le paramètre $\theta$ et nous avons le paramètre $x_S$ sur l'axe des ordonnées. (c)Reconstruction par rétroprojection filtrée de la valise avec avec la discrétisation angulaire $d\theta = 0.005$ rad. . . . .	42

II.4	(a) et (c) Projections pour les deux positions de l'image originale avec la discrétisation angulaire $\Delta\theta = 0.005$ rad. Sur les axes des abscisses, nous retrouvons le paramètre $\theta$ et nous avons le paramètre $x_S$ sur les axes des ordonnées. (b) et (d) Reconstruction de l'image de la valise par rétroprojection filtrée pour chacune des deux positions. (e) Reconstruction globale par fusion des deux images reconstruites, les petites structures dans l'objet sont bien reconstruites maintenant. . . . .	44
II.5	Principe de fonctionnement de l'imagerie par émission utilisant la $TRV_2$	46
II.6	(a) Fantôme original de la thyroïde. (b) Application de la $TRV_2$ sur le thyroïdien avec la discrétisation angulaire $d\omega = 0.005$ rad. Sur les axes des abscisses nous retrouvons le paramètre $\xi$ et nous avons le nombre de valeurs du paramètre $\omega$ sur les axes des ordonnées. (c) Reconstruction du fantôme par rétroprojection filtrée . . . . .	48
II.7	Principe de la tomographie Compton par émission . . . . .	50
II.8	(a) Fantôme original de la carte d'activité d'un cœur à l'aide d'une coupe de Zubal. (b) Application de la TRVC sur cette image avec prise en compte des paramètres physiques. . . . .	52
II.9	Concept du nouveau système de bimodalité . . . . .	53
II.10	Principe de la modalité de Norton en tomographie Compton . . . . .	54
II.11	(a) Fantôme originale d'une coupe thoracique de Zubal. (b) Application de la CART sur cette image avec prises en compte des paramètres physique. . . . .	55
II.12	Principe de fonctionnement de l'algorithme GIPC . . . . .	61
II.13	Différentes reconstructions de la carte de densité électronique, de la carte d'activité et une estimation de la carte d'atténuation pour différent niveau de RSB. Les reconstructions sont obtenues en l'algorithme GIPC et le bruit est généré par un procédé poissonien. Nous commençons l'algorithme à partir des données données dans les figures II.11(b) et II.8(b). . . . .	64
II.14	Évolution de l'EQMR (en %) suivant le nombre d'itérations de l'algorithme pour la correction de la densité d'électrons (a) et pour la carte d'activité (b) pour différents niveaux de RSB. Les différentes courbes s'arrêtent quand le critère d'arrêt de l'algorithme est atteint. . . . .	65
III.1	Principe d'un radar à synthèse d'ouverture CARABAS. . . . .	68
III.2	Géométrie de la transformée de Radon sphérique . . . . .	72
III.3	Représentation d'un PSF pour $x_0 = 5$ , $y_0 = 5$ et $z_0 = 5$ et $u_z = 15$ . Nous remarquons la forme caractéristique en paraboloïde . . . . .	73
III.4	. . . . .	77
III.5	(a) Image de trois points dans l'espace. (b) Jeu de données pour $u_y$ fixé. Sur les axes des abscisses, nous retrouvons le paramètre $r$ et nous avons le paramètre $u_x$ sur les axes des ordonnées . . . . .	78
III.6	Reconstruction des cibles ponctuelles . . . . .	78
III.7	Image originale 3D de mixtures de gaussiennes sur une grille 64x64x64.	79
III.8	(a) Représentation en courbe de niveau de III.7. (b) Données obtenues par transformée de Radon sphérique pour $u_y = 0$ . (c) Reconstruction par inversion exacte. . . . .	80

III.9	Colonne 1 : coupes altimétriques de l'image originale Fig. III.7 avec une évolution de bas en haut. Colonne 2 : reconstructions par inversion exacte. . . . .	81
III.10	(a) Image originale 3D de mixtures de gaussiennes sur une grille 32x32x32 et sa représentation en courbe de niveau (b).(c) Données obtenues par transformée de Radon sphérique pour $u_y = 0$ . . . . .	82
III.11	Reconstructions par courbes de niveau non seuillées pour des mixtures de gaussiennes (a) sur une grille 32x32x32 en utilisant l'inversion exacte pour différents niveaux de variance de bruit speckle (b)-(l). . . . .	83
III.12	Reconstructions par courbes de niveau non seuillées pour une coupe des mixtures de gaussiennes (a) sur une grille 32x32x32 en utilisant l'inversion exacte pour différents niveaux de variance de bruit speckle (b)-(l). . . . .	84
III.13	Reconstructions par courbes de niveau non seuillées pour des mixtures de gaussiennes (a) sur une grille 64x64x64 en utilisant la formule d'inversion exacte (b) puis l'inversion approchée pour différents paramètres de régularisation $\gamma$ (c)-(i). . . . .	88
III.14	Évolution de l'erreur quadratique en fonction des valeurs de $\gamma$ pour la reconstruction par inversion approchée avec un mollifieur gaussien sur une grille 64x64x64. . . . .	89
III.15	Évolution de l'erreur quadratique en fonction des valeurs de $\gamma$ pour plusieurs niveaux de variances de bruit sur une grille 32x32x32. . . . .	89
III.16	Colonne 1 : coupes altimétriques de l'image originale Fig. III.7 avec une évolution de bas en haut. Colonne 2 : reconstructions par inversion exacte. Colonne 3 : reconstructions par inversion approchée avec $\gamma = 3$ . . . . .	91
III.17	Colonne 1 : coupes altimétriques de l'image originale Fig. III.7 avec une évolution de bas en haut. Colonne 2 : reconstructions par inversion exacte. Colonne 3 : reconstructions par inversion approchée avec $\gamma = 3$ . . . . .	92
III.18	Reconstructions par courbes de niveau non seuillées pour des mixtures de gaussiennes (a) sur une grille 32x32x32 en utilisant l'inversion approchée pour différents niveaux de variance de bruit speckle avec un paramètre de régularisation $\gamma = 3.3$ (b)-(l). . . . .	93
III.19	Reconstructions non seuillées pour une coupe des mixtures de gaussiennes (a) sur une grille 32x32x32 en utilisant l'inversion approchée pour différents niveaux de variance de bruit speckle avec un paramètre de régularisation $\gamma = 3.3$ (b)-(l). . . . .	94





---

# Introduction

---

## Contexte de la thèse

Les travaux pionniers de Johann Radon en 1917 ont introduit une nouvelle transformation intégrale qui associe à toute fonction son intégrale sur une droite du plan. Ces travaux ont trouvé un intérêt pratique dans le domaine de l'imagerie avec l'émergence du scanner médical (tomodensitomètre) en 1972. En effet, bien que de nos jours les techniques d'imagerie basées sur les rayonnements ionisants X et gamma sont devenues indispensables pour explorer les structures internes, grâce à leur propriété pénétrante, pour le diagnostic médicale ou pour le contrôle non destructif industriel, il aura fallu attendre les travaux de G. Hounsfield et A.M. Cormack, récompensés par un prix Nobel, sur les premiers scanners pour qu'elles soient développées et par voie de fait l'utilisation dans ce nouveau champ d'applications des transformées de Radon. Il s'avère que l'acquisition des mesures dans le scanner tomographique est modélisée par la transformée de Radon sur des lignes droites et son inversion donne la reconstruction exacte de l'image sous étude. Depuis lors, de très nombreux travaux se sont attelés dans ce contexte à l'étude de cette transformée, sur les méthodes d'inversion permettant de reconstruire les images des milieux étudiés avec la plus grande précision, sur sa numérisation et sa régularisation mais aussi sur sa généralisation à d'autres supports d'intégration que les lignes droites, ceci afin d'étendre les méthodes de résolution de problèmes inverses pour le scanner tomographique à un panel plus large de modalités d'imagerie. Ainsi dès 1981, Cormack a généralisé les transformées de Radon sur des cercles [19]. Nous pourrions notamment citer par exemple les généralisations de la transformée de Radon sur des sphères avec les travaux pionniers de Andersson [2] ou sur des lignes brisées avec les études de Basko [6]. La généralisation de la transformée de Radon est donc une clef vers une utilisation de cet outil très puissant pour d'autres applications que le scanner à rayons X. C'est dans ce cadre que cette thèse s'inscrit avec l'étude de deux types de généralisations de la transformée de Radon et de leurs applications ainsi que la mise en œuvre du calcul numérique de leurs inversions et de la résolution analytique de problèmes qui en découlent, les solutions analytiques ayant l'avantage d'être exactes et donc de prouver la faisabilité de nos méthodes pour éventuellement l'extension à d'autres types de travaux.

Dans un premier temps, nous nous intéressons à la généralisation de la transformée de Radon sur des lignes brisées proposée par Truong et Nguyen en 2011 [78] et nous travaillons sur l'application qui en découle en imageries médicale et industrielle par rayonnements ionisants (gamma ou X) que cela soit pour de l'imagerie par transmission ou pour de l'imagerie par émission utilisant le rayonnement diffusé. Pour comprendre l'intérêt d'une telle généralisation pour cette dernière application, il faut revenir au principe de la tomographie conventionnelle. Cette dernière utilise le coefficient d'atténuation linéaire comme agent imageur. Cette atténuation représente la somme de toutes les interactions impliquant les photons du rayonnement avec la matière étudiée et donc informe sur les pertes de photons dans la matière. Mais dès que nous nous plaçons à des gammes d'énergies fortes (typiquement de 140 à 511 keV), la plus grande partie de l'atténuation provient

de la diffusion Compton qui peut représenter jusqu'à 80% des photons émis suivant le niveau d'énergie de la source. Généralement pour éviter les dégradations sérieuses causées par la diffusion des photons (à savoir la perte importante de contraste, le flou étalé sur toute l'image et les fausses détections très dangereuses en imagerie médicale), les photons diffusés sont traités comme du bruit et sont éliminés, mais ceci entraîne irrémédiablement une dégradation de la qualité de reconstruction (moins de photons sur les détecteurs) notamment quand le rayonnement utilisé est faible, ce qui est le cas en imagerie médicale impliquant des isotopes radioactifs où les doses injectées ne peuvent pas être importantes. Il faut donc essayer de trouver une méthode moins problématique que l'élimination des rayonnements diffusés. Au lieu d'exploiter seulement le rayonnement primaire non dévié par la diffusion Compton, nous proposons d'exploiter judicieusement le rayonnement diffusé pour reconstruire l'image et donc de ne plus le filtrer comme du bruit ce qui est fait jusqu'à présent. C'est le principe de l'imagerie à partir du rayonnement diffusé. Mais si nous considérons le rayonnement diffusé comme agent imageur, il va de soi qu'il faut prendre en compte les trajets des photons diffusés qui ne sont plus rectilignes et c'est là qu'intervient notre nouvelle transformée de Radon sur des lignes brisées pour la modélisation de ces nouvelles trajectoires. Dans le cas de l'imagerie par rayonnement diffusé, l'objet n'est plus caractérisé par sa carte d'atténuation mais par sa carte de densité électronique et la méthode va donc se confronter à deux problèmes majeurs : à savoir la prise en compte de la densité électronique non constante dans un objet et de la correction de l'atténuation. Jusqu'à présent, on utilisait l'une des nombreuses méthodes de correction (algorithme de Chang généralisé, IPC pour Iterative precorrection ...) pour corriger les données avant de procéder à la reconstruction d'image. Mais ces méthodes sont fortement liées à une modalité d'imagerie bien précise et ne permettant en outre que de corriger le problème d'atténuation, et ne sont donc pas applicables de suite à nos méthodes. C'est pourquoi il est intéressant d'essayer d'établir une méthode plus généraliste et applicable à notre problème pour réussir notre correction.

Dans un second temps, nous étudions la transformée de Radon sphérique dans le cadre d'un radar à synthèse d'ouverture. Le modèle rigoureux mathématique pour un radar émissif et diffusant est donné par les équations de Maxwell de l'électromagnétisme. Mais à cause de la complexité des formules de reconstruction d'images basées sur ces équations et la difficulté de leur mise en œuvre numérique notamment pour la reconstruction 3D d'images, d'autres solutions peuvent être envisagées. En effet, si l'on considère la géométrie sphérique de la propagation du front d'onde du champ électromagnétique, on peut très bien la modéliser en employant la transformée de Radon sphérique comme l'ont montré Cheney et Redding [65]. Nous étudions donc une nouvelle famille de transformée de Radon définie sur des sphères (cohérente avec la physique de la propagation électromagnétique) et dont l'inversion permet de reconstruire l'image originale. Néanmoins le noyau de l'intégrale est singulier, nous avons dû développer des méthodes approchées de l'inversion de la transformée de Radon sphérique dans le cadre de reconstruction 2D et 3D pour ce type de radar.

## Plan de la thèse et contributions

### Chapitre 1 : Imagerie et transformée de Radon

Dans ce chapitre de généralités et d'introduction, nous passons en revue l'état de l'art en imagerie par rayonnement ionisant et en imagerie radar, nous introduisons et présentons ensuite les bases de la transformée de Radon classique et de son inversion.

## **Chapitre 2 : La transformée de Radon sur des lignes brisées et imagerie par rayonnement ionisant**

Ce chapitre traite le problème de la transformée de Radon sur des lignes brisées et de ses applications en imagerie par rayonnement ionisant. Cette généralisation a été initialement proposée par Truong et Nguyen en 2011 [78]. Nous proposons ici une formalisation de cette transformée pour plusieurs applications possibles pour lesquelles nous réalisons un calcul de l'inversion ainsi que ses résultats dans le cadre de deux imageries : une imagerie par transmission couplée avec le phénomène de réflexion et une imagerie par émission utilisant le rayonnement  $\gamma$  diffusé. Nous étudions ensuite un moyen de pallier aux problèmes d'atténuation et de non linéarité de la densité électronique. Pour ce faire, nous avons mis au point un tout nouvel algorithme de correction d'atténuation : le GIPC (Generalized Iterative pre-correction). Nos travaux aboutissent enfin à la mise en œuvre d'une troisième imagerie, la première bimodalité d'imagerie Compton en combinant notre modalité par émission fondée sur la transformée de Radon sur des lignes brisées (TRV) et une autre modalité par transmission fondée sur une transformée de Radon sur des arcs de cercles (TRAC) [56]. Cette bimodalité a pour objectif de proposer l'émergence de nouveaux systèmes bimodaux pouvant concurrencer les méthodes bimodales médicales actuelles, grâce à la complémentarité des deux modalités (par émission et par transmission) et à l'ajout d'un tout nouvel algorithme de correction d'atténuation dans ce système bimodal.

## **Chapitre 3 : Transformée de Radon sphérique et application en radar**

Nous présentons ici nos travaux sur la mise en œuvre de deux méthodes d'inversion de la TRS dans le cadre du radar RSO : l'inversion analytique basée initialement sur les travaux de Redding [65] avec nos améliorations et une inversion approchée fondée sur l'approche "*mollifieurs*" introduite par A. Louis [38]. Les résultats qui seront présentés en fin de chapitre montrent la pertinence du choix des algorithmes et la performance de la méthode de reconstruction d'image fondée sur la TRS dans ce domaine d'application.

Les conclusions et perspectives font l'objet du dernier chapitre. Il est donc à espérer que cette étude représente une étape importante pour le développement de l'imagerie Compton et des algorithmes de reconstruction d'images basés sur les TR généralisées.



# Imagerie et transformée de Radon

---

Pour comprendre l'environnement qui l'entoure, l'homme essaie avant tout de le visualiser. C'est pourquoi aujourd'hui, obtenir des images d'un objet est devenu primordial pour comprendre sa nature et ses propriétés. Il a fallu donc introduire de nombreux moyens de visualisation au cours de l'histoire moderne pour satisfaire les besoins de connaissances. Des premiers appareils photos et microscopes à l'IRM, les méthodes d'imagerie se sont multipliées et constituent aujourd'hui un large panel. Cependant l'amélioration des méthodes existantes et la mise au point de nouvelles modalités d'imagerie demeurent des enjeux majeurs dans de nombreux domaines de l'activité humaine. Les grandeurs physiques permettant les modalités d'imagerie peuvent être de plusieurs natures : électromagnétique (lumière, infrarouge, rayons X, gamma, champ magnétique. . . ), de nature subatomique (neutrons), de nature mécanique (ultra-sons ...), de nature électrique (courants de Foucault)...

Nous nous intéresserons par la suite à la famille d'imagerie basée sur le rayonnement ionisant (rayonnement X ou  $\gamma$ ) et les ondes électromagnétiques dans le cadre de l'imagerie radar.

Le but final de tout système d'imagerie et de reconstruire l'image la plus fidèle possible de l'objet étudié. Le problème de formation d'image (obtention des mesures à partir d'une caractéristique de l'objet) est souvent connu sous le nom de problème direct tandis que celui de reconstruction d'image (reconstruction d'une caractéristique de l'objet en utilisant les mesures) l'est sous le nom de problème inverse. Nous allons donc commencer par un bref rappel sur ce dernier type de problème.

## I.1 Reconstruction d'images et problèmes inverses

Pour cette partie nous allons nous placer dans un cadre classique de l'étude des problèmes inverses linéaires, c'est à dire dans le cadre des espaces de Hilbert où nous définissons deux ensembles  $F$  et  $G$  et un opérateur linéaire  $R : F \rightarrow G$  tel que :

$$Rf = g, \tag{I.1}$$

avec  $f \in F$  la fonction à reconstruire et  $g \in G$  le jeux de données que nous possédons.

### I.1.1 Définition d'un problème mal-posé

Un problème est dit bien-posé si le problème vérifie trois conditions :

- l'existence, le problème admet au moins une solution pour tout ensemble de données.

$$\forall g \in G \exists f : Rf = g \quad (\text{I.2})$$

- l'unicité, la solution est unique, *i.e.* le noyau de  $R$  est :

$$\text{Ker}(R) = 0 \quad (\text{I.3})$$

- la stabilité, la solution dépend continûment des données, *i.e.* un faible écart sur les données ne doit pas entraîner une solution radicalement différente.

On dit qu'un problème est mal-posé si au moins l'une de ces conditions n'est pas vérifiée. En général, les problèmes directs sont bien posés et les problèmes inverses sont souvent mal posés. En reconstruction d'image, le problème est quasiment systématiquement mal-posé ne serait ce qu'à cause de la limitation du jeu de données (fenêtres d'exploration limitées, durée de l'acquisition, nombre de prise de vue limitée, etc). L'étude de tels problèmes mal posés a conduit au développement de nombreuses méthodes de régularisation.

### I.1.2 Techniques de reconstruction d'images et de régularisation

De façon générale en problème inverse, nous pouvons distinguer deux approches pour la reconstruction d'image et donc pour la résolution du problème inverse lié : dans la première nous travaillons directement dans le cadre fonctionnel et en continu et nous étudions avant tout les fonctions et les opérateurs, ce sont les méthodes analytiques sur lesquels nous reviendrons plus en détail par la suite dans le cadre de la transformée de Radon ; dans la deuxième, nous nous plaçons dès le départ dans un cadre discret pour les équations dont je ferai ici un bref aperçu. De manière générale, toutes les méthodes de reconstruction ont besoin d'une régularisation. La régularisation d'un problème mal-posé consiste à le transformer en un problème bien posé, c'est-à-dire à définir une solution unique pour toutes les mesures possibles dans l'espace des observations et à en assurer la stabilité vis-à-vis des erreurs sur ces mesures[8, 68]. C'est pourquoi les méthodes de reconstruction se basent ou incorporent une méthode de régularisation.

#### I.1.2.a Méthodes algébriques

Bien que ce manuscrit de thèse s'orientera avant tout sur les résolutions analytiques des différents problèmes, il existe d'autres façons de résoudre les problèmes inverses liés aux transformées de Radon généralisées et de façon plus générale aux problèmes inverses.

Les méthodes algébriques sont basées sur l'introduction d'un système linéaire caractérisant le problème et de le résoudre. Cela permet de prendre en compte initialement la discrétisation des formules et de prendre en compte de nombreux phénomènes en amont assez facilement (atténuation, caractéristiques physiques, erreurs de mesure, géométrie du phénomène). Nous retrouvons donc le système linéaire  $g = Rf$  en posant une matrice de projection  $R$  qui est un ensemble de fonctionnelles linéaires traduisant le problème et transformant une carte de l'image  $f$  (ce qui est à reconstruire) en des mesures  $g$ .

Les méthodes déterministes correspondent à la résolution du système par l'inversion directe de la matrice de projection  $R$ . Pour cela nous pourrions par exemple travailler le modèle d'inversion généralisée. Le système à résoudre sera alors  $R^t g = R^t R f$ . Si le rang de la matrice  $(R^t R)$  de taille  $n \times n$  est bien de  $n$ , alors nous aurons bien l'existence de la solution inverse généralisée :

$$\hat{f} = (R^t R)^{-1} R^t g \quad (\text{I.4})$$

qui est unique et qui minimise l'erreur quadratique  $(g - Rf)^t(g - Rf)$ .

$R^* = (R^t R)^{-1} R^t$  est l'inverse généralisé de  $R$ . Le problème restant étant la stabilité. Pour étudier cette stabilité, nous étudierons la décomposition de la matrice  $R$  en valeurs singulières où la source de l'instabilité se retrouvera pour les faibles valeurs singulières qui amplifieront le bruit. Il faudra alors régulariser pour obtenir un meilleur conditionnement de la matrice  $(R^t R)$ .

Mais l'une des méthodes les plus efficaces pour ce faire reste la technique de la décomposition en valeurs singulières (SVD). Les valeurs singulières  $\sigma_i$  d'une matrice  $R$  sont les racines carrées des valeurs propres de la matrice carrée  $R^t R$ . Les valeurs propres sont liées aux directions invariantes par la transformation  $R$ , tandis que les valeurs singulières contiennent la métrique sur cette transformation. Cette méthode permet de décomposer une matrice rectangulaire  $R_{m \times n}$  (si le rang de la matrice  $R$  est  $\text{rang}(R) = \min(n, m)$ ) dont les coefficients appartiennent au corps  $K$ , où  $K = \mathbb{R}$  ou  $K = \mathbb{C}$ , de dimension  $m$  par  $n$  en un produit de matrice :

$$R_{m \times n} = U_{m \times m} S_{m \times n} V_{n \times n}^t, \quad (\text{I.5})$$

où  $U_{m \times m}$  est une matrice unitaire  $m \times m$  sur  $K$  qui contient un ensemble de vecteurs de base orthonormés de  $K^m$ , dits « de sortie »,  $V_{n \times n}^t$  est la matrice transposée de  $V_{n \times n}$ , matrice unitaire  $n \times n$  sur  $K$  qui contient un ensemble de vecteurs de base orthonormés de  $K^n$ , dits « d'entrée » ou « d'analyse » et  $S_{m \times n}$  est la matrice diagonale qui contient les valeurs singulières de la matrice  $R_{m \times n}$ .

Néanmoins si le rang de la matrice  $R$  est  $\text{rang}(R) = k < \min(n, m)$ , la décomposition s'écrit alors :

$$R_{m \times n} = U_{m \times k} S_{k \times k} V_{k \times n}^t, \quad (\text{I.6})$$

A partir de la décomposition SDV, on peut obtenir la matrice pseudo-inverse de  $R$  :

$$R^{-1} = V S^{-1} U^t. \quad (\text{I.7})$$

Cette décomposition permet aussi de calculer le conditionnement du système (rapport entre le minimum et maximum des valeurs singulières) et si le système est trop mal conditionné, on pourra régulariser le problème par la troncature des valeurs singulières trop petites, ce qui reste l'un des principaux avantages de cette méthode.

Dans le cadre de ces méthodes, pour effectuer une régularisation du système, nous pouvons aussi ajouter des contraintes à ce dernier (l'exemple classique en imagerie est la positivité) ou effectuer une régularisation avec *a priori* de douceur. On cherche ici la solution approchée  $\hat{f}$  qui minimise la fonctionnelle  $J$  du type :

$$\min J(f) = \|Rf - g\|^2 + \lambda \Gamma(f) \quad (\text{I.8})$$

dans laquelle  $\Gamma(f)$  représente une contrainte de douceur sur  $f$  et  $\lambda$  est un multiplicateur de Lagrange. Par exemple, nous pouvons prendre le cas simple  $\Gamma(f) = \|f\|^2$  qui est un



cas particulier de la méthode de Tikhonov-Phillips avec  $\Gamma(f) = \int \sum_k p_k(t) \left| \frac{\partial^k f}{\partial t^k} \right|^2 dt$  où  $k$  et les fonctions  $p_k$  positives, continues et continûment dérivables restent à choisir.

Les méthodes itératives quant à elles, permettent de trouver une solution par une succession d'estimations. Pour chaque estimation de l'objet, les projections correspondantes sont calculées et comparées aux projections mesurées, et le résultat de la comparaison est utilisé pour modifier l'estimation. La plus connue de ces méthodes est ART (algebraic reconstruction method) proposée par Gordon [27], mais il en existe d'autres comme l'algorithme SIRT par exemple. L'arrêt d'une méthode itérative en choisissant judicieusement le nombre d'itérations et la variation du poids de chaque correction permettent de régulariser la méthode.

### I.1.2.b Méthodes statistiques

Les approches statistiques se basent sur un modèle direct qui considère les mesures de  $g$  du flux de photons arrivant sur le détecteur dépendant de phénomènes stochastiques (bruit poissonnien, bruit gaussien. . .). Le problème de reconstruction devient l'estimation probabiliste des valeurs de  $f$ . Nous résolvons généralement ce problème d'estimation par des méthodes de maximum de vraisemblance [49] basées par exemple sur l'algorithme Expectation Maximisation (EM) [69]. La majeure partie de ces méthodes incorpore une régularisation bayésienne [24, 29], servant à introduire une modélisation *a priori* de l'objet. Le principe de l'approche stochastique est de construire des distributions de probabilité pour modéliser le type de solution attendue et le processus de formation des projections. Nous notons  $p(f)$  le modèle *a priori* de l'objet, et  $p(g|f)$  le modèle du processus de mesure qui tient compte du bruit. L'application du théorème de Bayes fournit alors la loi *a posteriori*  $p(f|g)$  (qui nous permettra d'obtenir notre solution) donnée par :

$$p(f|g) = \frac{p(g|f)p(f)}{p(g)}. \quad (\text{I.9})$$

Parmi les différents modèles de l'objet introduit par le terme de probabilité  $p(f)$ , nous trouvons notamment

- le modèle gaussien
- le modèle de maximum d'entropie
- le modèle markovien.

### I.1.3 Approximation de l'inversion par "*mollifieur*"

Une autre façon d'aborder le problème de régularisation est la recherche d'une solution approchée *i.e.* au lieu de chercher  $f$  nous cherchons à obtenir des solutions approchées  $\hat{f}$  tel que  $\|R\hat{f} - g\| \leq \epsilon$  avec  $\epsilon > 0$  fixé ou des quasi-solutions ( $\|g - R\hat{f}\| \leq \|g - Rf\|, \forall f \in F$ ). C'est dans ce type de régularisations des problèmes mal-posés que nous retrouvons les méthodes comme Backus-Gilbert ou celle des *mollifieurs* [4, 44, 68].

La méthode des *mollifieurs* introduite par [44] est un outil puissant de régularisation de problème linéaire ou non linéaire [45] et est basée sur deux idées principales. La première est que le calcul du moment de la solution est stable, *i.e.* au lieu de calculer  $f$ , nous allons calculer une version lissée  $\hat{f}_\gamma = \langle f, e_\gamma \rangle$  avec  $e_\gamma$  la fonction *mollifieur*, ceci dans le but de

réduire la composante en haute fréquence de la solution qui est la partie la plus affectée par le bruit. La fonction *mollifieur* doit pouvoir vérifier

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \langle f(X), e_\gamma^X \rangle = \langle f(X), \delta(X) \rangle \text{ et que } \int e_\gamma^X dX = 1. \quad (\text{I.10})$$

La deuxième idée, dans le cadre linéaire, est de réussir à approcher  $e_\gamma$  en utilisant l'opérateur adjoint  $R^*$  par un noyau de reconstruction  $\psi_\gamma : R^*\psi_\gamma \simeq e_\gamma$ . Alors

$$\hat{f}_\gamma = \langle f, e_\gamma \rangle \simeq \langle f, R^*\psi_\gamma \rangle = \langle Rf, \psi_\gamma \rangle = \langle g, \psi_\gamma \rangle \quad (\text{I.11})$$

La fonction approchée est donc le produit scalaire entre nos données et le noyau de reconstruction de notre *mollifieur*. Ce noyau pouvant être calculé indépendamment de l'inversion des données. Le paramètre  $\gamma$  étant notre paramètre de régularisation et le *mollifieur* notre choix de méthode. Il est aussi important de souligner que dans certains cas particuliers de *mollifieurs*, cette méthode est équivalente à d'autres méthodes de régularisation comme Tikhonov-Phillips ou à certains algorithmes itératifs [45]. Cette approche sera notamment utilisée dans la dernière partie de cette thèse.

## I.2 Interactions physiques des rayonnements avec la matière

Décrire les phénomènes physiques qui interviennent dans nos systèmes d'imagerie permet de modéliser le problème direct et donc aussi de poser les bases des problèmes inverses liés à ces derniers.

Quelques soient le type de rayonnement, les rayons interagissent avec la matière et le milieu et ces interactions peuvent être multiples : réflexion, absorption, diffusion, diffraction. Ces phénomènes nous offrent un regard sur l'objet à reconstruire mais sont également responsables des déformations sur les images que nous obtenons. Pour ces raisons il est important de comprendre ces phénomènes et de connaître leur probabilité d'existence pour se focaliser sur les effets prépondérants et les corriger si besoin est.

### I.2.1 Modèles de rétrodiffusion

Dans le cadre général du rayonnement électromagnétique, nous parlerons de diffusion si le milieu de propagation est non homogène. Ce phénomène est d'autant plus important en radar car la détection (ou la rétroprojection) dépend des phénomènes de rétrodiffusion. Deux grandeurs sont ici à prendre en compte, la longueur d'onde  $\lambda$  du rayonnement et la dimension caractéristique des discontinuités  $L$ . Bien que nous ne puissions pas traiter le cas général, il est possible de traiter analytiquement deux cas :

$L \gg \lambda$  : nous sommes ici dans le cadre d'un dioptré plan qui sépare deux milieux d'indices différents  $n$  et  $n'$  où nous utilisons simplement l'équation de Snell-Descartes pour modéliser le problème. Nous observons alors une onde réfléchie selon un angle  $\theta$  dans le premier milieu et une onde réfractée d'un angle  $\theta'$  dans le second milieu tel que :  $n \sin \theta = n' \sin \theta'$ . Ce formalisme change dans le cadre où le second milieu est plus ou moins conducteur ou un terme d'atténuation apparaîtra. De plus ce formalisme demande un dioptré parfaitement plan ou assimilable localement à un plan, ce qui n'est pas souvent le cas notamment en radar où la planéité doit être garantie à une fraction de longueur d'onde près (par exemple  $\lambda/20$ ). Nous parlerons alors d'un dioptré rugueux pour un rayonnement

d'incidence  $\theta$  si l'écart quadratique moyen des irrégularités de surface,  $\Delta h$  satisfait au critère de Rayleigh  $\Delta h > \frac{\lambda}{8 \cos(\theta)}$  ce qui se traduit par un déphasage quadratique moyen supérieur à  $\pi/2$ . Plus la rugosité sera forte ou plus l'angle de diffusion sera fort, plus le diagramme de rétroprojection s'éloignera de celui d'un dioptré plan jusqu'à éventuellement que l'effet de rugosité l'emporte sur celui du dioptré.

$L \ll \lambda$  : nous sommes ici dans le cadre d'une cible ponctuelle aussi appelé cible de Rayleigh. Si la cible est homogène, elle se comporte comme une source secondaire, rayonnant de la même façon qu'un dipôle, proportionnellement au carré de la fréquence, à la variation locale de la permittivité dans la cible et au volume de cette dernière [47]. Quand nous avons un ensemble de cibles ponctuelles de Rayleigh, l'onde réémise est une somme d'ondes élémentaires rediffusées par chaque cible. Dans l'hypothèse où la densité de cibles n'est pas trop grande, nous pouvons omettre un phénomène parfois majeur (notamment en milieu forestier) : celui des multiréflexions. Cette hypothèse souvent justifiée permet de continuer à satisfaire les hypothèses de l'approximation de Born. Dans le cadre d'un rayonnement radar où le train d'ondes émis est de grande longueur par rapport à la longueur d'onde, on parle d'illumination cohérente et dans ce cas la sommation des échos réémis par chaque cible s'effectue de manière cohérente : c'est-à-dire que nous devons sommer les amplitudes complexes et non les énergies. Cette caractéristique du signal radar est à l'origine du phénomène de chatoiement (bruit speckle).

### I.2.2 Interaction des rayonnements ionisants avec la matière

Dans le cas des rayonnements ionisants un photon peut interagir avec les électrons, les noyaux, ou les champs électromagnétiques des atomes et certaines interactions peuvent jouer sur l'énergie des ces photons. Nous pouvons distinguer trois interactions principales, à savoir les diffusions élastiques, la diffusion Compton et l'absorption.

#### Diffusion élastique (Thomson-Rayleigh)

L'interaction de type diffusion élastique a lieu entre un photon et un ou plusieurs électrons atomiques et a la propriété de garder le niveau d'énergie du photon. Ce type d'événement est négligeable dans les tissus mous (assimilable à l'eau) et se produit pour des photons de basse énergie. Cet effet est généralement négligeable en imagerie médicale surtout quand on utilise un rayonnement  $\gamma$ , c'est pourquoi nous ne nous attarderons pas sur cet effet.

La diffusion Thomson est la diffusion élastique d'un photon par un électron et ne concerne que les photons de basse énergie qui sont absorbés par un électron. L'absorption du photon va entraîner une oscillation de l'électron qui va réémettre un photon de même énergie mais dans une direction différente.

La diffusion de Rayleigh se produit lorsque la longueur d'onde du photon incident est du même ordre de grandeur que la dimension de l'atome, le photon incident interagit avec tous les électrons de l'atome qui se mettent à osciller en phase avant d'émettre un photon de même énergie. L'angle de diffusion a tendance à augmenter quand l'énergie du photon incident diminue.

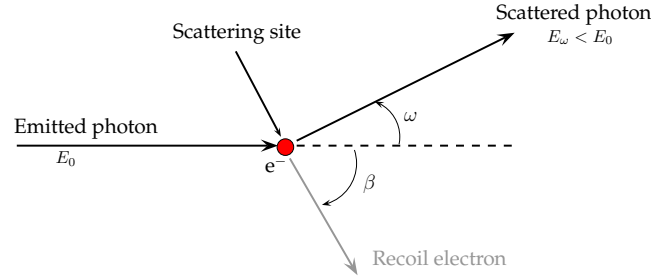


FIGURE I.1 – Illustration du principe de la diffusion Compton.

### Diffusion Compton

Cet interaction sera au cœur de nos contributions du chapitre 2. Elle résulte de la collision entre un photon incident, d'énergie initiale  $E_0$ , et un électron. Ce principe est illustré par la figure I.1. Il résulte de cette collision un transfert d'énergie entre les deux particules, le photon cédant une partie de son énergie à l'électron qui se mettra en mouvement (recoil de l'électron) et le photon verra sa direction déviée d'un angle  $\omega$  proportionnel à la perte d'énergie de ce dernier (voir l'exemple du Technétium dans la figure I.2). Le lien entre la perte d'énergie du photon et l'angle de diffusion  $\omega$  est donnée par la relation Compton [17] :

$$E_\omega = \frac{E_0}{1 + \frac{E_0}{mc^2}(1 - \cos \omega)} \quad (\text{I.12})$$

où  $E_\omega$  est l'énergie du photon après diffusion et  $mc^2$  représente l'énergie d'un électron au repos (0.511 MeV). Le photon diffusé peut ensuite interagir à nouveau en étant absorbé ou diffusé. L'ordre de diffusion correspond au nombre de fois où le photon subit l'effet Compton.

### Absorption

L'absorption photoélectrique est prépondérante pour des énergies de quelques dizaines de keV. Lors de l'interaction avec un électron de la couche électronique d'un atome du milieu environnant, le photon peut transférer la totalité de son énergie à l'atome qui émet alors un électron, appelé photoélectron. Nous avons donc là, disparition par absorption de notre photon. Un photon d'énergie inférieure à l'énergie de liaison de l'électron ne peut pas interagir et la probabilité d'interaction du photon avec l'électron est plus importante pour des énergies proches (mais supérieures) à l'énergie de liaison.

Il existe un autre type d'absorption à savoir la création de paire. Cette dernière correspond à la matérialisation d'une paire électron-positon lorsqu'un photon disparaît au voisinage d'un noyau ou d'un électron atomique. Le positon va rapidement être freiné par les collisions successives et perdre ainsi de l'énergie. Il va se lier à cause de cette perte d'énergie avec un électron pour former une pseudo-particule appelée positronium. Cette entité a une période de vie très courte (0.1 ns) et se transforme en deux photons par annihilation, qui sont émis dans des directions opposées avec chacun une énergie cinétique de 511 keV. Ce phénomène est surtout exploité en tomographie par émission positons et sera très marginal dans nos applications donc nous n'en parlerons plus par la suite.

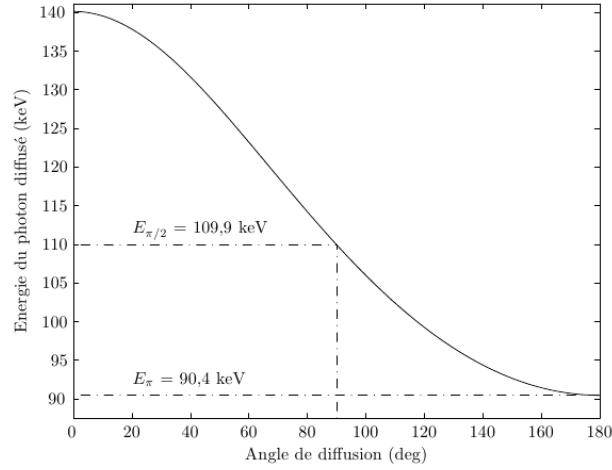


FIGURE I.2 – Énergie d'un photon diffusé par effet Compton en fonction de l'angle de diffusion dans les cas du Technétium 99m avec  $E_0 = 140$  keV.

### I.2.3 Atténuation du rayonnement ionisant et section efficace

L'atténuation d'un rayonnement ionisant est la description macroscopique de l'interaction du faisceau de photons qui traverse la matière à cause de toutes les interactions individuelles décrites plus tôt.

Dans le cas simple d'un faisceau photonique monochromatique pour la traversée d'un milieu homogène d'épaisseur donnée  $x$ , nous pouvons formuler la variation de l'intensité du faisceau résultant de l'atténuation par la loi de Beer-Lambert :

$$I = I_0 e^{-\mu x} \quad (\text{I.13})$$

où  $\mu$  est le coefficient d'atténuation linéique en  $\text{cm}^{-1}$  du matériau.

Cette vision de l'atténuation au sens macroscopique est nécessaire pour quantifier la probabilité des événements à un lieu donné, ce qui est primordial pour faire un modèle. Ainsi dans l'optique d'une approche plus microscopique qui permet notamment de distinguer les différentes interactions, nous devons poser la notion de section efficace. Considérons une tranche infiniment fine d'épaisseur  $dr$  d'un absorbant. Dans cet absorbant, nous ne considérons que le  $k$ -ème type d'élément cible (électron ou noyau). Il est éclairé uniformément sous incidence perpendiculaire par un flux de photons d'intensité  $\lambda_0$  ( $\text{s}^{-1} \cdot \text{cm}^{-2}$ ) distribués uniformément sur une surface  $S$  (figure I.3). Chaque cible est associée à une section dite efficace  $\sigma_k$ , perpendiculaire au rayonnement incident. La section efficace correspond à la surface fictive que devrait avoir une particule cible pour reproduire la probabilité observée de l'interaction  $k$  (photoélectrique, Compton ou Rayleigh) avec le photon en supposant que ces collisions se produisent entre objets matériels impénétrables. Le nombre de photons ayant interagit par unité de temps et de surface dans la tranche d'épaisseur

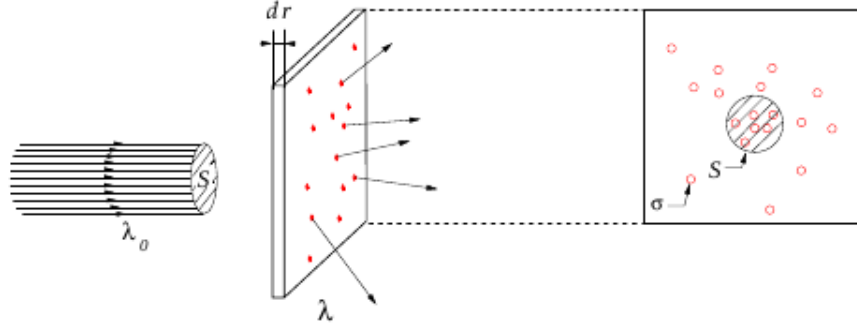


FIGURE I.3 – Atténuation du flux d'incidence à travers toutes les sections efficaces pour une section  $S$  du flux.

$dr$  de l'absorbant est noté  $\lambda_k$  et pour un élément cible la probabilité qu'une interaction se produise dépend de  $\sigma_k$ . La section efficace relie donc la probabilité de l'interaction aux positions possibles de cette dernière et par conséquent la section efficace peut être supérieure ou inférieure à la surface du disque de la section réelle de la particule.

Un photon incident interagit avec un élément cible avec une probabilité égale au rapport  $\lambda_k / \lambda_0$ . Cette grandeur dépend de la densité des éléments cibles ainsi que de l'épaisseur  $dr$ . Elle est égale à la projection de la section efficace totale de tous les noyaux de la cible situés à l'intérieur de la tranche de matière considérée sur une surface  $S$ . Avec une densité de  $n_k$  éléments cibles de type  $k$  par élément de volume, un photon peut interagir avec  $n_k \cdot S \cdot dr$  éléments cibles. La probabilité d'interaction de type  $k$  d'un photon incident dans la couche d'absorbant d'épaisseur  $dr$  est donc donnée par :

$$p_k = \frac{\lambda_k}{\lambda_0} = n_k \cdot \sigma_k \cdot dr \quad (\text{I.14})$$

Le nombre de photons interagissant avec un élément de  $k$  peut être exprimée comme le produit de la probabilité  $p_k$  par le flux  $\lambda_0$ . Et donc comme  $\lambda_k$  représente aussi la variation du flux de photons à la traversée de la couche élémentaire et comme le flux diminue,  $d\lambda_k$  est précédé d'un signe moins, nous trouvons :

$$\frac{d\lambda_k}{\lambda_0} = -n_k \cdot \sigma_k \cdot dr \quad (\text{I.15})$$

En intégrant cette relation sur une longueur  $x$ , nous retrouvons la loi de Beer-Lambert (Eq. (I.13)) à condition de poser  $\mu = \sigma_k \cdot n_k$ .

Pour des énergies de l'ordre de la centaine de keV, le faisceau incident est atténué dans un milieu par deux manières prédominantes :

- l'absorption photoélectrique due aux  $n_a$  atomes/cm<sup>3</sup> de section efficace  $\sigma_a$  cm<sup>2</sup>/atome,
- la diffusion Compton due au  $n_e$  électrons/cm<sup>3</sup> de section efficace  $\sigma_c$  cm<sup>2</sup>/électron.

En faisant l'hypothèse que tous les électrons sont des électrons libres, la section efficace totale  $\sigma_{tot}$  pour un atome est la somme des sections efficaces des deux phénomènes, soit :

$$\sigma_{tot} = \sigma_a + Z\sigma_c, \quad (\text{I.16})$$

avec  $Z$  le numéro atomique.

On trouve expérimentalement que la section efficace de l'effet photoélectrique varie comme :

$$\sigma_a \approx \frac{Z^5}{(h\nu)^3} \quad (\text{I.17})$$

En ce qui concerne la section efficace dans le cas de la diffusion Compton, Klein et Nishina ont démontré en 1928 sa formulation :

$$\sigma_c = \frac{3\sigma_0}{4} \left( \frac{2(1+\epsilon)^2}{\epsilon^2(1+2\epsilon)} + \frac{\ln(1+2\epsilon)}{\epsilon} \left( \frac{1}{2} - \frac{1+\epsilon}{\epsilon^2} \right) - \frac{1+3\epsilon}{(1+2\epsilon)^2} \right) \quad (\text{I.18})$$

avec  $\epsilon = E_0/(m_e c^2)$ ,  $\sigma_0 = 8\pi r_e^2/3$  la section efficace dans le cas de la diffusion Thomson et  $r_e = 2.818 \times 10^{-13} \text{ cm}$  le rayon classique d'un électron.

On aura donc le coefficient d'atténuation linéique résultant de la diffusion Compton comme  $\mu_c = n_e \times \sigma_c$ .

On préférera néanmoins utiliser dans le cadre de la diffusion Compton, la section efficace différentielle qui décrit la distribution angulaire de l'interaction. Cette vision est en effet plus pratique car elle la relie à la notion d'angle très importante dans le cadre de l'étude de cette diffusion. La section efficace différentielle de collision  $(d\sigma_c/d\Omega)_\omega$  est définie telle que  $d\sigma_c$  est la probabilité pour qu'un photon incident soit dévié dans l'angle solide élémentaire  $d\Omega$  faisant un angle  $\omega$  avec la direction incidente du photon. Nous retrouvons la section efficace totale en intégrant sur tout l'espace :

$$\sigma_c = 2\pi \int_0^\pi \left( \frac{d\sigma_c}{d\Omega} \right)_\omega \sin \omega d\omega. \quad (\text{I.19})$$

et la section efficace différentielle est calculée à partir de la probabilité de Klein-Nishina  $P(\omega)$  [40] en fonction de l'angle  $\omega$  et de l'énergie d'incidence réduite  $\epsilon$

$$\left( \frac{d\sigma_c}{d\Omega} \right)_\omega = r_e^2 P(\omega) = \frac{r_e^2}{2} \left( 1 + \frac{\epsilon^2(1 - \cos(\omega))^2}{(1 + \cos^2(\omega))[1 + \epsilon(1 - \cos(\omega))]} \frac{1 + \cos^2(\omega)}{[1 + \epsilon(1 - \cos(\omega))]^2} \right) \quad (\text{I.20})$$

## I.2.4 Bruit statistique

Au delà des phénomènes d'interactions physiques entre les particules qui peuvent suivant l'imagerie dégrader notre image, il faut bien entendu prendre en compte les différents bruits qui peuvent venir se superposer à nos mesures. Au delà du bruit gaussien classique dû à l'électronique, quand nous parlons de rayonnement ionisant, un autre bruit important est à prendre en compte. Il s'agit du bruit statistique dû à la désintégration radioactive. En effet cette dernière n'est pas régulière dans le temps et suit un processus poissonnien. Il en résulte un bruit statistique observé sur les projections. Le nombre de désintégrations observées est une variable aléatoire  $X$  qui suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda_m$  représentant la valeur moyenne de  $X$ . La probabilité d'observer  $k$  désintégrations dans un intervalle de temps donnée est :

$$P(X = k) = e^{-\lambda_m} \frac{\lambda_m^k}{k!} \quad (\text{I.21})$$

La variance de  $X$  vaut  $\sqrt{\lambda_m}$  et l'erreur relative moyenne est :  $1/\sqrt{\lambda_m}$ . On remarque notamment que plus  $\lambda_m$  est petit, plus l'erreur est forte.

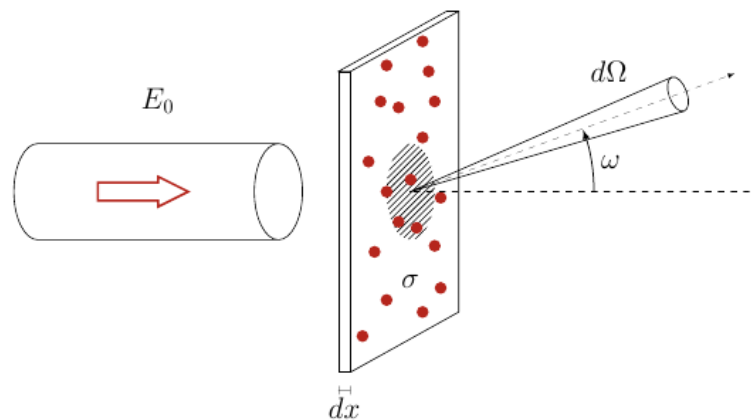


FIGURE I.4 – Géométrie de la section efficace différentielle

### I.3 Imagerie par rayonnements ionisants

Observer l'intérieur d'un patient sans chirurgie est devenu d'un intérêt primordial dans bon nombre d'activités médicales. Ce genre d'observation s'est vite démocratisé dans des domaines très distincts du médical comme par exemple dans le domaine industriel (contrôle non destructif), la sismographie, l'astrophysique... Il reste néanmoins que l'imagerie médicale peut se targuer d'avoir un nombre important de modalités d'imagerie différentes permettant de pallier à ses besoins spécifiques, que cela soit en terme de résolution, de multiplicité de milieux différents à étudier ou de type d'information à obtenir comme nous pouvons le constater dans le tableau I.1.

#### I.3.1 Imagerie X et gamma

Pour sonder les parties inaccessibles d'un objet, grâce à leurs propriétés de pénétration, les rayonnements ionisants sont devenus un outil très performant. L'imagerie biomédicale a besoin d'obtenir des informations anatomiques (forme, taille, positionnement des organes, détections de dégâts internes ou de corps étrangers ...) comme fonctionnelles (activité du cœur, du cerveau ...) pour diagnostiquer les pathologies ou visualiser en chirurgie assistée ...

Pour obtenir ces deux types d'informations, deux types d'imagerie sont utilisées communément :

- L'imagerie par transmission où l'on place l'objet entre la source de radiation et le détecteur. La mesure du flux de radiation transmis au détecteur nous donne l'information sur l'atténuation à l'intérieur de l'objet. C'est la méthode la plus utilisée dans le secteur médical mais elle est aussi très répandue dans le domaine industriel pour le contrôle non destructif notamment. L'imagerie par transmission permet d'obtenir une image en deux dimensions de la structure interne d'un objet en deux dimensions (radiologie) ou une reconstruction en trois dimensions d'un objet en prenant



Nom de la technique	Phénomène physique utilisé	Organes examinés	Informations obtenues	Résolution spatiale
Radiographie 1885	Rayons X	Os, Poumons.	Anatomiques	millimètre
Echographie Echo-Doppler 1955	Ultrasons	Fœtus, Organes abdominaux Organes pelviens.	Anatomiques et fonctionnelles	centimètre
Scintigraphie 1958	Rayons $\gamma$	Os, Poumons, Cœur.	fonctionnelles	quelques millimètres
TDM tomodensitométrie scanner X 1972	Rayons X	Cerveau, Organes abdominaux et pelviens, Poumons, Cœur.	Anatomiques	millimètre
IRM 1973-1982	Résonnance magnétique nucléaire	Cerveau, Poumons, Cœur et organes pelviens.	Anatomiques et fonctionnelles	inférieure au millimètre
SPECT : tomographie gamma 1977-1980	Rayons $\gamma$	Cerveau, Cœur, Organes abdominaux.	Anatomiques et fonctionnelles	quelques millimètres
PET : tomographie par émission de positons 1988	émission simultanée de photons d'annihilation	Cerveau, Cœur, Organes abdominaux.	Fonctionnelles	quelques millimètres

TABLE I.1 – Principales méthodes d'imagerie médicale.

plusieurs prises de vue autour de l'objet (CT scanner).

- L'imagerie par émission. Ici la source est directement interne à l'objet d'étude et nous cherchons à la reconstruire ainsi que son évolution au cours du temps. La source peut être directement liée à l'objet d'étude (réacteurs nucléaires, armes atomiques ...) ou introduite comme dans le domaine biomédical par injection d'un traceur radioactif. Cette méthode permet d'obtenir des informations fonctionnelles sur l'objet. Cette méthode est principalement utilisée dans le domaine médical où nous retrouvons la modalité de scintigraphie, de l'imagerie SPECT (Single Photon Emission Computed Tomography) ou la tomographie par émission de positon (PET).

### Tomographie par rayons X

Le principe de la tomographie par rayons X est fondée sur l'atténuation sélective du rayonnement vis-à-vis des matières à traverser. Concrètement l'objet, placé entre la source et le détecteur, est traversé par un faisceau de rayons X monochromatiques et pour la gamme d'énergie et la matière considérée en imagerie biomédicale, l'interaction entre les photons et la matière se traduit globalement par l'atténuation du faisceau. La tomographie par rayons X consiste donc à reconstruire la fonction représentant la distribution du coefficient d'atténuation linéique liée à la densité de l'objet en connaissant la fonction de l'intensité du rayonnement mesurée par l'ensemble des détecteurs. Les travaux de Cormack et Hounsfield, récompensés en 1979 par le prix Nobel de médecine, ont montré qu'un ensemble discret de projections acquises sous des incidences angulaires régulièrement réparties autour de l'objet peut servir à reconstruire la distribution recherchée. La modélisation mathématique est donnée par la transformation de Radon sur laquelle nous reviendrons.

### SPECT (Single Photon Emission Computerized Tomography)

Le SPECT, introduit en 1963 par Kuhl et Edwards, utilise le principe de l'imagerie par émission. Nous cherchons à reconstruire la distribution des traceurs radioactifs qui émettent des photons gamma monoénergétiques à l'intérieur de l'objet. L'émission des photons étant isotrope, nous plaçons un collimateur devant la caméra pour sélectionner la direction entrante supposé des photons et nous faisons tourner une gamma-caméra de type Anger autour de l'objet pour obtenir différentes projections. Nous mesurons ainsi la somme pondérée de toutes les contributions radioactives le long de la droite passant par le point du détecteur considéré et de direction donnée par l'axe du collimateur. Le coefficient de pondération de chacune de ces valeurs est donné par la distribution de l'atténuation de l'objet. L'atténuation qui est le paramètre physique sur lequel repose l'imagerie par transmission devient ici un facteur nuisible car elle fait perdre un nombre important de données. La transformation découverte par Novikov [60] et Natterer [54] qui relie la distribution d'émission et la distribution de l'atténuation aux projections intégrales atténuées mesurées sur le détecteur est connue sous le nom de transformation de Radon atténuée. Avant eux Tretiak [75] avait résolu le problème pour une atténuation constante.

La qualité de la reconstruction dépend en premier lieu de la qualité des données. Or,

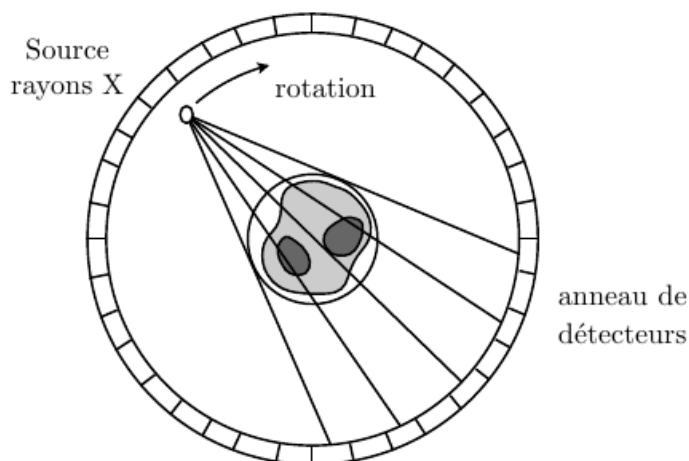


FIGURE I.5 – Exemple de scanner X : dans ce tomographe de quatrième génération, le tube à rayons X émet un faisceau en éventail qui irradie toute la section de l'objet, et tourne à l'intérieur de l'anneau des détecteurs disposés autour de l'objet.

les images prises par les gamma-caméras de type Anger ont une très faible sensibilité. Une première cause de la faible sensibilité des images est l'atténuation du milieu, plus de 80% des photons émis sont, soit diffusés par effet Compton, soit absorbés par le milieu. La deuxième raison est due aux défauts intrinsèques du collimateur qui dégradent les images (fausse détection, diffusion à l'intérieur ...) comme le montre Fig.I.6. Actuellement un filtrage énergétique est appliqué pour supprimer les photons diffusés qui ont été captés par le détecteur pour éviter qu'ils ne soient pris en compte.

### Le PET (Positron emission tomography)

Le PET, fondé sur les travaux pionniers de Ter-Pogossian, est une technique récente. Il s'agit comme le SPECT d'une imagerie par émission, mais contrairement à cette dernière le marqueur n'émet pas directement des photons mais des positons. Un positon, après avoir libéré son énergie cinétique lors d'un court trajet autour de son point d'émission se désintègre avec un électron en émettant deux photons d'annihilation de 511 keV à 180 degrés l'un de l'autre. Ces photons sont détectés par deux détecteurs opposés en coïncidence (Fig.I.7). Quand une coïncidence est détectée, le système détermine la ligne traversant l'objet qui connecte les deux détecteurs, cette ligne est appelée ligne de réponse. Ainsi, la direction des photons n'est plus détectée mécaniquement mais électroniquement ce qui permet d'augmenter la sensibilité du système, et l'ensemble des projections de la distribution de l'émission ne s'obtient plus en tournant une caméra mais en captant suffisamment de lignes de réponse. Les avancées technologiques sur la rapidité des cristaux et de l'électronique des détecteurs permettent d'estimer la zone du point de l'émission des photons grâce à la mesure de la différence des temps de vol des deux photons. Le PET a une

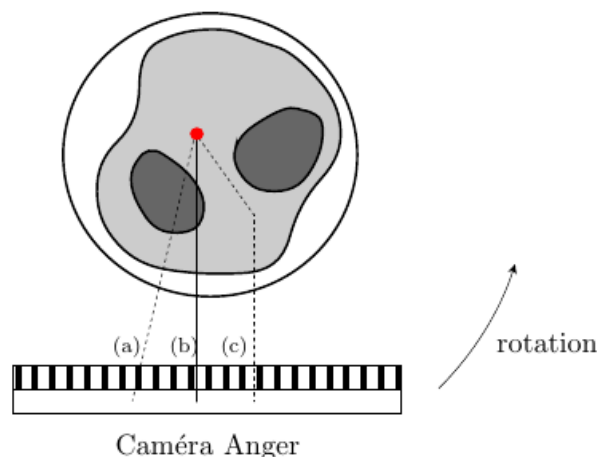


FIGURE I.6 – Système d'imagerie par émission monophotonique. Image formée par les photons primaires (b), et le bruit dû aux photons diffusés (c) et aux photons non absorbés par le collimateur (a).

résolution plus grande que le SPECT mais le système demeure très onéreux et nécessite des radio-traceurs produits par un cyclotron dans son voisinage.

### I.3.2 Du modèle physique de la tomographie par rayon X à la transformée de Radon

La tomographie nucléaire classique par transmission se base sur le principe physique de l'atténuation que subit un flux de photons traversant un milieu. Ainsi la mesure par des détecteurs de ce flux "atténué" permet d'obtenir la carte d'atténuation grâce à des techniques de reconstruction.

Pour pouvoir reconstruire une image, il faut déjà être capable de modéliser mathématiquement les mesures réalisées par les détecteurs. La Figure I.8 présente le principe d'acquisition dans le cas de la tomographie par transmission. Les photons émis par la source traversent le milieu et l'objet, que nous souhaitons étudier, puis sont recueillis par les détecteurs. Nous considérons que la distance entre l'objet et la source est suffisante pour pouvoir considérer les différents faisceaux de photons comme parallèles. Nous nous placerons dans ce cas pour la suite de l'étude. La mesure de l'intensité de flux de rayons X dépend de la fonction d'atténuation linéique du milieu  $f(x, y)$  le long de l'axe de propagation (loi de Beer-Lambert) :

$$I = I_0 e^{-\int_D f(x,y) dl} \quad (\text{I.22})$$

où  $D$  est la droite décrivant le parcours des photons arrivant sur le détecteur donné ( $dl$  est donc la longueur élémentaire de la droite  $D$ ). Cette équation traduit le phénomène d'atténuation en quantifiant l'intensité du flux de photons par un faisceau monochromatique

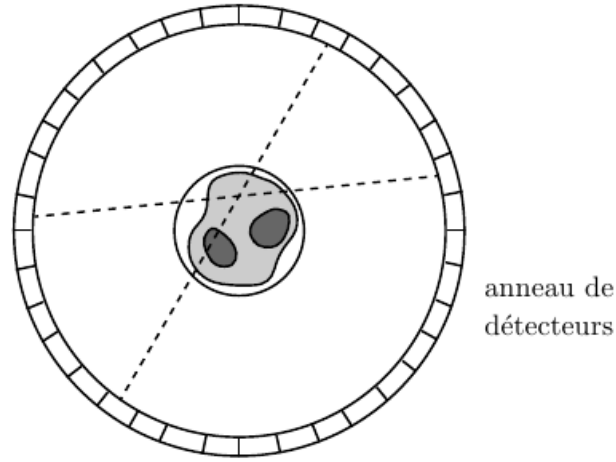


FIGURE I.7 – Système d'imagerie par PET.

de rayons X traversant des tissus biologiques et permet donc d'obtenir une modélisation mathématique des mesures sur le détecteur pour un objet de carte d'atténuation  $f(x, y)$  vu sous l'angle  $\varphi$  :

$$g(p, \varphi) = \ln \left( \frac{I_0}{I(p, \varphi)} \right) = \int_{(x,y) \in D(p, \varphi)} f(x, y) dl. \quad (\text{I.23})$$

$g(p, \varphi)$  sont appelées "projections" et correspondent en fait à l'écriture d'une transformée de Radon qui décrit la projection d'une fonction  $f$  sur une droite  $D$ .

### Définition de la transformée de Radon

Depuis sa découverte par J. Radon [63], la transformée de Radon a été longtemps ignorée avant de devenir, après sa redécouverte dans les années 70 suite à l'invention du scanner, un outil très puissant dans beaucoup de modalités de tomographie comme le CT scanner ou l'imagerie SPECT. Dans un premier temps, cette transformée a avant tout été utilisée dans le cadre d'une transformée intégrale sur des lignes droites. Nous allons donc présenter ce cadre bien précis avant d'essayer d'élargir le champ des supports dans les prochaines grandes parties.

La transformée de Radon classique avec les paramètres définis sur la figure I.9 s'écrit donc comme :

$$g(p, \varphi) = \mathcal{R}f(p, \varphi) = \int_{(x,y) \in D(\varphi, p)} f(x, y) dl. \quad (\text{I.24})$$

Le calcul de l'élément différentiel le long de la ligne droite étudiée nous conduit à exprimer la transformée de Radon par l'intermédiaire d'une distribution de Dirac,

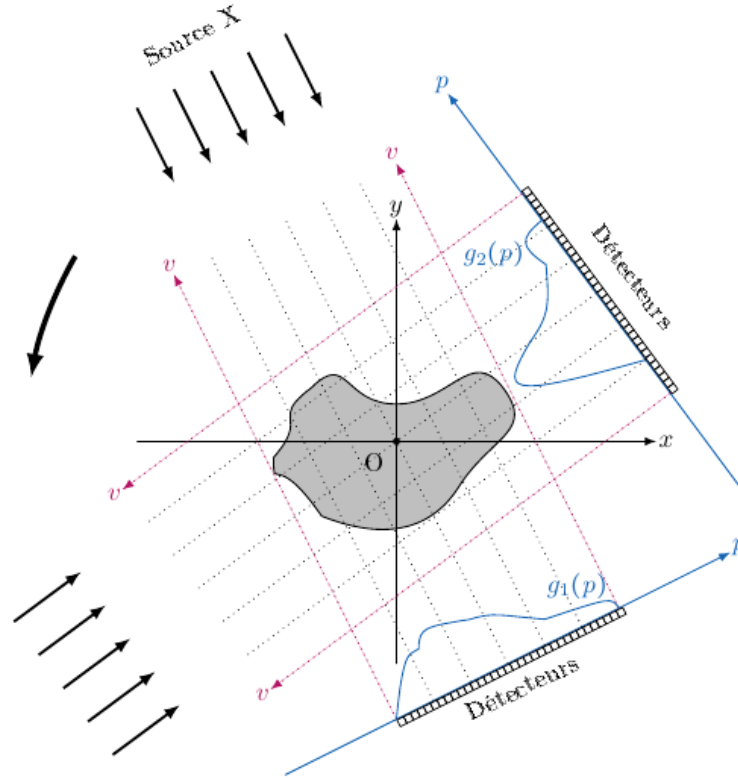


FIGURE I.8 – Principes de la tomographie par rayons X

$$g(p, \varphi) = \mathcal{R}f(p, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(r - x \cos(\varphi) - y \sin(\varphi)) dx dy. \quad (\text{I.25})$$

A partir de cette écriture, nous pouvons aussi définir la PSF (Point spread function) qui correspond à la réponse impulsionnelle de la transformée c'est à dire pour  $f_c(x_0, y_0) = \delta(x - x_0, y - y_0)$  où  $(x_0, y_0)$  est un couple de coordonnées quelconque. La réponse impulsionnelle est :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}f_c(p, \varphi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0, y - y_0) \delta(r - x \cos(\varphi) - y \sin(\varphi)) dx dy. \\ &= \delta(p - x_0 \cos(\varphi) + y_0 \sin(\varphi)). \end{aligned} \quad (\text{I.26})$$

Le support dans l'espace de Radon,  $(p, \varphi)$ , est donc :  $p = x_0 \cos(\varphi) + y_0 \sin(\varphi)$ . Ce support est de type sinusoïdal, d'où le nom que l'on donne aux mesures effectuées : le sinogramme (voir l'exemple de la figure I.10). Il n'est pas directement interprétable et nous devons donc reconstruire l'image de l'objet ou du patient à partir de ces projections.

Néanmoins ce modèle possède quelques limites, car il repose sur quelques hypothèses non vérifiées en réalité. Il ne prend notamment pas en compte les problèmes de diffusion, problème sur lequel nous reviendrons dans le prochain chapitre.

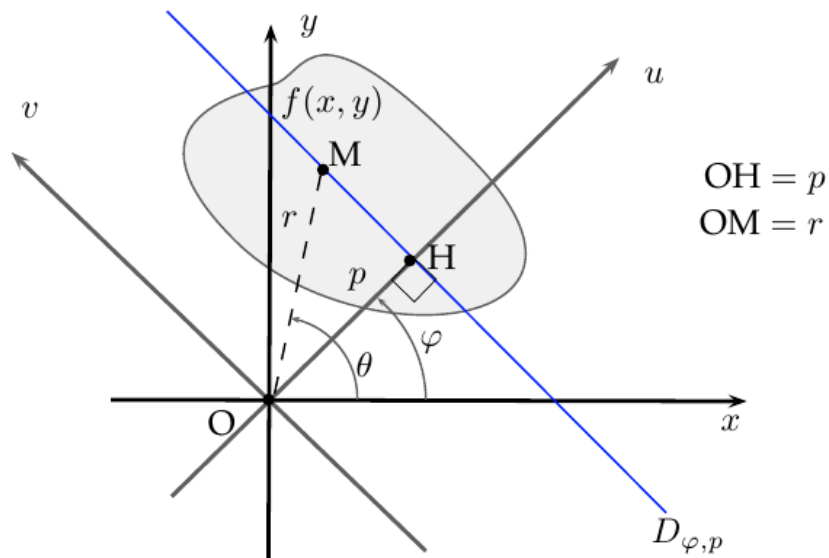


FIGURE I.9 – Représentation géométrique et paramétrique de l'acquisition des données suivant une ligne droite

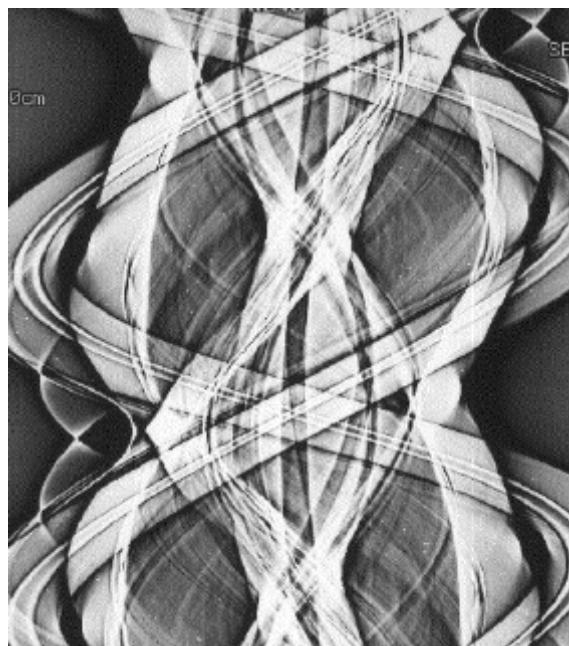


FIGURE I.10 – Exemple de sinogramme.

### I.3.3 Techniques de reconstruction d'images par inversion analytique

L'objet de cette partie est de donner un aperçu général des différentes approches analytiques pour la résolution des problèmes inverses dans le cadre de la transformée de Radon. De façon générale, nous pouvons aussi utiliser d'autres approches comme celles proposées dans la partie I.1.2.

Les méthodes analytiques sont basées sur le fait de trouver l'inversion exacte du problème après passage dans un espace dual. Dans ces méthodes, nous faisons l'hypothèse que les mesures sont des échantillons d'une fonction qui est liée à l'objet par une intégrale et donc en utilisant l'analyse fonctionnelle nous cherchons la relation explicite pour l'inverser. Une fois cela fait, il ne restera plus qu'à calculer cette formule numériquement. Ce type de méthode possède donc l'avantage de pouvoir obtenir les propriétés exactes des opérateurs que l'on utilise.

Dans le cadre de la transformée de Radon, il existe de nombreux travaux sur l'inversion analytique de l'opérateur Radon [Herman, 1980, Roux, 1980, Hamon, 1990]. Ces algorithmes, en particulier la rétroprojection filtrée sur laquelle nous reviendrons, sont en effet énormément utilisés en imagerie médicale, notamment grâce aux nombres importants de prises de vue dans ce domaine qui permettent une discrétisation aisée de ces méthodes. Nous parlerons ici des deux méthodes les plus connues à savoir la méthode fondée sur la théorème de la coupe centrale et de la rétroprojection filtrée.

#### Théorème de la coupe centrale

La transformation de Fourier unidimensionnelle  $\hat{g}_{1D}(w, \varphi)$  de la projection  $g(r, \varphi)$  d'une fonction  $f(x, y)$  correspond à une coupe de la transformée de Fourier bidimensionnelle  $\hat{f}(u, v)$  de la fonction  $f(x, y)$  :

$$\hat{g}_{1D}(w, \varphi) = \hat{f}(u, v) \quad (\text{I.27})$$

avec  $\hat{g}_{1D}(w, \varphi)$  la transformée de Fourier de  $g(r, \varphi)$  selon  $r$ . Théoriquement cette méthode permet de reconstruire la coupe tomographique. Nous calculons la transformée de Fourier de chaque projection. Nous reportons les valeurs dans le plan fréquentiel et une transformée de Fourier inverse donne la coupe tomographique. Cette méthode souffre toutefois d'un gros défaut. Les projections acquises sont toujours en nombre limité et toutes les valeurs dans le domaine de Fourier caractérisant l'objet ne sont pas connues, et ce plus particulièrement pour les hautes fréquences. Les données manquantes (des vides dans le plan fréquentiel) sont comblées par interpolation à partir des points les plus proches et ce sur des nombres complexes. Cette méthode est en pratique assez inusitée par rapport à la méthode qui va suivre.

#### Reconstruction d'image par rétroprojection filtrée

La méthode d'inversion analytique la plus utilisée en reconstruction d'images est la rétroprojection filtrée.



Pour comprendre cette méthode plaçons nous dans le domaine de Fourier :

$$\hat{f}(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(u, v) e^{2\pi i(ux+vy)} du dv, \quad (\text{I.28})$$

en appliquant le théorème de la coupe centrale, nous obtenons :

$$\hat{f}(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}_{1D}(w, \varphi) e^{2\pi i(ux+vy)} du dv, \quad (\text{I.29})$$

ce qui devient en coordonnées polaires  $u = w \cos \varphi$  et  $v = w \sin \varphi$  :

$$\hat{f}(x, y) = \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}_{1D}(w, \varphi) e^{2\pi i w(x \cos \varphi + y \sin \varphi)} |w| dw d\varphi, \quad (\text{I.30})$$

On peut définir ici l'opérateur  $B$  dit de rétroprojection comme :

$$B[g](x, y) = \int_0^{\pi} g(x \cos \varphi + y \sin \varphi, \varphi) d\varphi \quad (\text{I.31})$$

Donc au final cela revient à dire que :

$$f = B(TF^{-1}[TF[g].|w|]) \quad (\text{I.32})$$

Le méthode de rétroprojection filtrée consiste donc au calcul des transformées de Fourier des projections, nous les multiplions ensuite par le filtre rampe  $|w|$ . Nous effectuons ensuite sur les projections filtrées une transformation de Fourier inverse et nous réalisons un épandage des projections filtrées. La rétroprojection filtrée améliore nettement les images reconstruites, cependant si le nombre de projections n'est pas suffisamment grand, il persiste des artefacts en étoile. Le filtre rampe permet de faire ressortir les détails de l'image, mais comme il amplifie de manière très importante toutes les hautes fréquences, en pratique il rend le bruit prépondérant dans l'image. Pour réduire ce bruit, nous effectuons une apodisation du filtre rampe. Nous pouvons utiliser un filtre de Hann par exemple, mais d'autres filtres ont été utilisés comme le filtre de Hamming, de Parzen ou ceux de Shepp-Logan et Butterworth.

## I.4 Imagerie radar

Le radar est avec la radiographie l'une des plus vieilles méthodes d'imagerie. Ce terme est l'abréviation de radio detection and ranging, ou radio fait rappel de sa gamme de fréquence (3MHz à 100GHz) sur le spectre électromagnétique et le terme "detection and ranging" fait quant à lui référence au but premier du radar : détecter et localiser des cibles. Le principe est quand à lui relativement simple, un émetteur rayonne un signal bref et un récepteur recueille l'écho engendré par la cible et l'intensité du signal reçu dépendra des formes de l'obstacle, de sa nature et de son orientation par rapport à l'illuminateur et au récepteur [43]. La localisation de la cible se fera ensuite par déduction de la distance de la cible via la mesure du temps nécessaire pour effectuer le trajet entre l'antenne d'émission, la cible et l'antenne de réception, ce qui revient pour un radar monostatique (l'antenne de réception est l'antenne d'émission) à un trajet aller-retour entre le radar et sa cible comme le montre la figure I.11. Et pour localiser sa direction, le radar va utiliser une antenne directive et chercher le maximum d'intensité reçue, maximum obtenue lorsque la direction du maximum du gain est celle de l'écho. Ce principe de base a ensuite été complexifié pour améliorer les sensibilités ou les résolutions, mais ce principe reste le même pour tous les radars. Dans cette thèse nous nous intéresserons particulièrement au radar à synthèse d'ouverture.

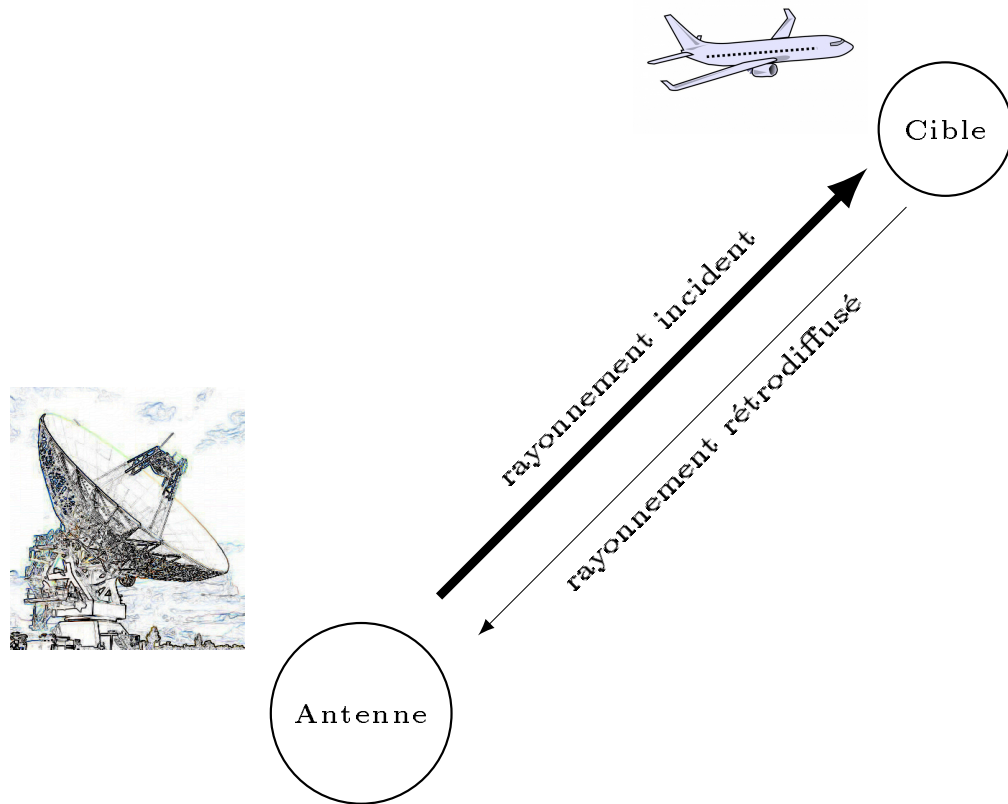


FIGURE I.11 – Principe d’un radar monostatique : le rayonnement émis est réfléchi sur la cible et renvoyé vers l’antenne de réception. On mesure le temps de trajet de l’onde pour déterminer la distance et on cherche l’orientation de l’antenne pour laquelle le maximum de d’intensité est atteint pour obtenir l’orientation.

#### I.4.1 Le radar à synthèse d’ouverture (RSO ou SAR en anglais)

Les radars classiques (radars des tours de contrôle ou de navire) permettent de détecter des objets passifs ou cibles en détectant les échos qu’ils provoquent et peuvent les localiser mais ne permettent pas de reconstruire à un instant donné une image de la scène observée. Ils sont néanmoins limités par les conditions naturelles (météo, perturbation atmosphérique) ainsi qu’en résolution [47]. Sous ce terme se regroupent toutes les systèmes d’imagerie radar réalisant des images à haute résolution de la Terre depuis un avion ou un satellite. Les radars à synthèse d’ouverture possèdent donc les avantages d’un signal radar avec des caractéristiques de propagation sur de longues distances couplées avec l’électronique moderne pour permettre de modéliser des images en haute résolution. Cette méthode complète les méthodes optiques traditionnelles d’imagerie (photographie, ...) sans se soucier des conditions d’éclairage de la scène (image de nuit comme de jour) ou des conditions atmosphériques à cause de la réponse unique de la scène aux fréquences du radar. A la différence des radars de surveillance, l’image obtenue par un radar imageur n’est pas associée à la rotation d’un système comme sur les radars classiques mais à un déplacement du porteur (avions, satellites) sur lequel est embarqué l’antenne qui vise généralement latéralement (une visée verticale entraînant un phénomène de repliement de

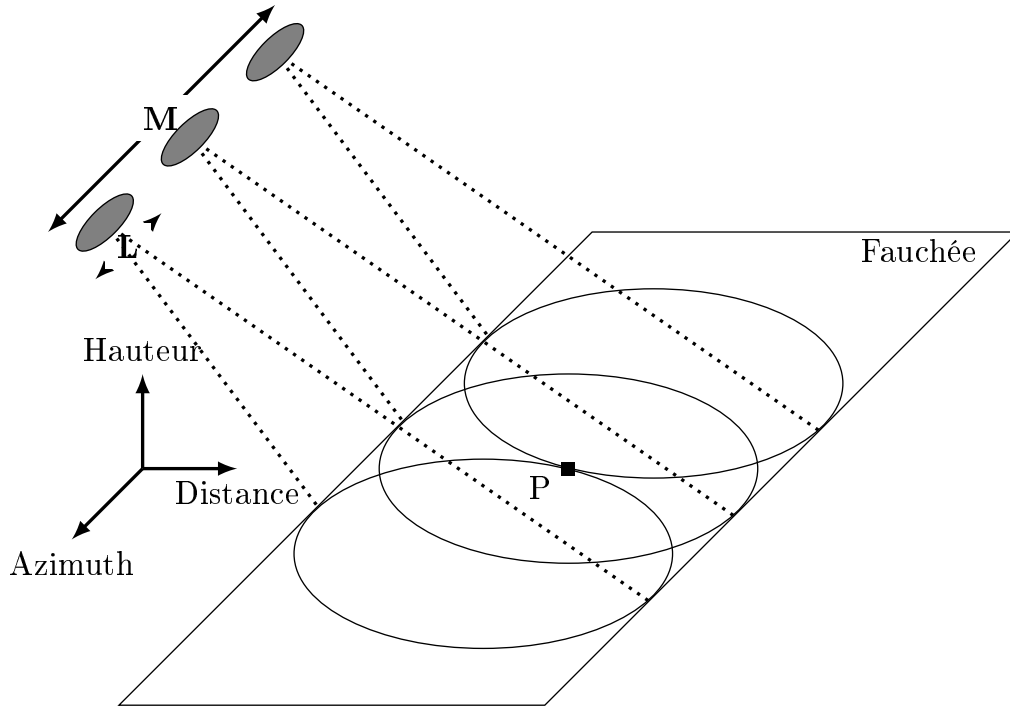


FIGURE I.12 – Principe d'un radar à synthèse d'ouverture.

l'image).

Chaque impulsion illumine une fois une bande de terrain. La largeur de la bande est appelée fauchée et est déterminée par les distances  $d_1$  (distance proximale) et  $d_2$  (portée distale) qui dépendent de l'instant du début de l'enregistrement de l'écho  $t_1$  ( $d_1 = c * t_1 / 2$ ) et de l'instant d'enregistrement de l'écho  $t_2$  ( $d_2 = c * t_2 / 2$ ).

La principale force de cette imagerie provient de l'amélioration de la résolution azimutale (parallèle au déplacement du porteur). Concrètement pour un radar classique, cette résolution va augmenter de paire avec la taille de l'ouverture de l'antenne i.e. la taille de l'antenne, sur un porteur mobile nous ne pouvons pas avoir une antenne trop grande donc cela est impossible concrètement, il faut donc trouver un autre moyen. C'est là où le déplacement du porteur rentre en ligne de compte. On utilise ce déplacement et la cohérence des signaux pour reconstituer artificiellement une antenne de grande dimension (Fig. I.12). Le radar se déplaçant entre deux émissions d'impulsion, il est en effet possible de synthétiser en recombinaison tous les échos en phase, une antenne réseau de très grande taille (ceci demande une connaissance exacte du déplacement du porteur pour compenser les effets de roulis ou de tangage par exemple).

On peut donner aussi l'équation SAR dans le cas monostatique régissant la puissance reçue du rayonnement par rapport à la puissance émise :

$$Pr = Pe * \frac{G^2 * \lambda^2 * \sigma}{(4\pi)^3 * D_{ca}^4 * a} \quad (I.33)$$

avec

- $Pr$  : puissance reçue.
- $Pe$  : puissance émise.
- $G$  : gain de l'antenne.
- $\lambda$  : longueur d'onde.
- $\sigma$  : surface équivalente radar ou SER (prend en compte les dimensions et les constantes diélectriques).
- $a$  : perte liées à l'absorption des milieux traversés.
- $D_{ca}$  : distance cible-antenne (ce terme en puissance 4 correspond aux termes d'atténuation géométrique).

Il faut aussi tenir compte du bruit potentiel pour l'analyse et le traitement des signaux reçus tant externes (radiation, Soleil ...) qu'interne (bruit thermique, ...). Une approximation du rapport signal sur bruit est la suivante :  $RSB = \frac{1}{T * B}$  où  $T$  est la contribution du bruit en kelvin et  $B$  la bande passante. Le RSB est donc meilleur pour une bande étroite ce qui n'est pas forcément possible dans le cas des radars embarqués sur les satellites qui nécessitent des émissions longues.

### Mise en équation du radar à synthèse d'ouverture

Comme tout problème électromagnétique, la mise en équation du radar à synthèse d'ouverture se fait par l'utilisation des équations de Maxwell [15]. Cependant on utilise régulièrement juste l'équation d'onde scalaire qui est un modèle satisfaisant pour la propagation de l'onde dans l'air :

$$\left( \nabla^2 - \frac{1}{c^2(x)} \delta_t^2 \right) U(t, x) = 0 \quad (\text{I.34})$$

avec  $c$  la vitesse de propagation qu'on assimilera à la vitesse de la lumière dans le vide  $c_0$ , le champ  $U$  dépendant dans ce cas présent généralement que du temps  $t$  et de la position  $r$  sur la trajectoire du porteur. Quand le champ magnétique interagit avec le sol, la polarisation sera affectée, mais si le système SAR ne mesure pas la polarisation, cette simplification reste valide. La solution fondamentale classique d'une équation d'onde dans le vide [76] est  $G_0(t - \tau, x - y)$  donnée par

$$G_0(t - \tau, x - y) = \frac{\delta(t - \tau - |x - y|/c_0)}{4\pi|x - y|}, \quad (\text{I.35})$$

ce qui correspond à l'interprétation physique du champ à  $(x, t)$  dû à une source ponctuelle de position  $y$  au temps  $\tau$ . Ce champ satisfait l'équation :

$$\left( \nabla^2 - \frac{1}{c^2(x)} \delta_t^2 \right) G_0(t - \tau, x - y) = \delta(t - \tau) \delta(x - y) \quad (\text{I.36})$$

Si nous revenons à notre problème de radar et que nous considérons que le signal émis  $P$  est de la forme :

$$P(t) = A(t) e^{i\omega_0 t} \quad (\text{I.37})$$

avec  $\omega_0$  la pulsation propre et  $A(t) \in \mathbb{C}$  l'amplitude variable. En prenant une source positionnée en  $y$ , le champs qui en résulte  $U_y(t, z - y)$  satisfait l'équation :

$$\left( \nabla^2 - \frac{1}{c^2(x)} \delta_t^2 \right) U_y(t, z - y) = P(t) \delta(z - y) \quad (\text{I.38})$$

et vaut :

$$\begin{aligned} U_y(t, z) &= (G_0 * P)(t, z - y) = \int \frac{\delta(t - \tau - |z - y|/c_0)}{4\pi|z - y|} P(\tau) d\tau \\ &= \frac{A(t - |z - y|/c_0)}{4\pi|z - y|} e^{i\omega_0(t - |z - y|/c_0)} \end{aligned}$$

Bien entendu, l'antenne n'est pas une source ponctuelle et est généralement soit un guide d'onde à fente [23] soit des antennes multibandes.

Si nous notons  $x$  le centre d'une antenne de longueur  $L$  et de largeur  $D$ , un point de l'antenne peut être écrit comme  $y = x + q$  où  $q$  est un vecteur allant du centre de l'antenne jusqu'au point de l'antenne recherché.  $q$  peut s'écrire avec un système de coordonnées liés à l'antenne :  $q = s_1 \vec{e}_1 + s_2 \vec{e}_2$ , où  $\vec{e}_1$  et  $\vec{e}_2$  sont des vecteurs unitaires suivant la largeur et la longueur de l'antenne respectivement, le second étant parallèle à la direction du porteur. Si nous considérons un point  $z$  très éloigné de l'antenne nous pouvons avoir l'approximation suivante :

$$|z - y| = |z - x| - (\overrightarrow{(z - x)} \cdot \vec{q}) + O(L^2/|z - x|) \quad (\text{I.39})$$

où la flèche symbolise un vecteur unité. L'équation (I.39) devient donc

$$U_y(t, z) \approx \frac{A(t - (|z - x| - \overrightarrow{(z - x)} \cdot \vec{q})/c_0)}{4\pi|z - x|} e^{i\omega_0(t - |z - x|/c_0)} e^{ik \overrightarrow{(z - x)} \cdot \vec{q}} \quad (\text{I.40})$$

avec  $k = \omega_0/c_0$ . Cette expression est valide car  $|q| \ll |z - x|$  et  $kL^2 \ll |z - x|$ . En utilisant le fait que  $|z - x| \gg \overrightarrow{(z - x)} \cdot \vec{q}$ , nous pouvons démontrer [58] que le champ incident  $U_y^{in}$  de l'antenne peut s'écrire quand ce dernier est loin de sa source comme :

$$U_y^{in}(t, z) \approx \frac{P(t - (|z - x|/c_0))}{4\pi|z - x|} w(\overrightarrow{(z - x)}), \quad (\text{I.41})$$

où

$$w(\overrightarrow{(z - x)}) = 4DL \text{sinc}(k \overrightarrow{(z - x)} \cdot \vec{e}_1 D/2) \text{sinc}(k \overrightarrow{(z - x)} \cdot \vec{e}_2 L/2) \quad (\text{I.42})$$

est le motif du rayonnement de l'antenne. Ce motif étant donné par des sinus cardinaux, nous pouvons en déduire la largeur de ce rayonnement en regardant la première condition d'annulation pour  $k \overrightarrow{(z - x)} \cdot \vec{e}_2 L/2 = \pi$ . Or  $2\pi/k = \lambda$ , nous retrouvons la condition suivante  $\overrightarrow{(z - x)} \cdot \vec{e}_2 = \lambda/L$ . Si nous définissons l'angle  $\theta$  comme l'angle de projection de  $\overrightarrow{(z - x)}$  sur la normale à  $\vec{e}_2$  (vecteur unitaire de la trajectoire du porteur), nous avons  $\overrightarrow{(z - x)} \cdot \vec{e}_2 \approx \cos(\pi/2 - \theta) = \sin(\theta) \approx \theta$  pour les petits angles de  $\theta$ . Donc dans ce cas, nous avons  $\theta \approx \lambda/L$  et donc la largeur du lobe principal du motif de rayonnement est de  $2\lambda/L$  selon  $\vec{e}_2$  et de façon réciproque de  $2\lambda/D$  selon  $\vec{e}_1$ . Il est ainsi très important de noter que plus notre ouverture de l'antenne est grande ou que plus notre longueur d'onde est petite, plus la largeur du lobe principal sera fine.

De surcroît si les dimensions de l'ouverture sont de l'ordre de la longueur d'onde, nous pourrions considérer qu'un seul lobe quasi-sphérique comme dans le système CARABAS [34, 79, 80] (voir III.1.2) à cause du phénomène de diffraction.

## Modèle de diffusion linéaire

Il faut donc aussi prendre en compte ensuite le phénomène de diffusion. Nous pouvons écrire la solution diffusée à l'équation (I.34), comme l'a démontré [58] :

$$\phi(t, x) = \phi^{in}(t, x) + \phi^d(t, x) \quad (\text{I.43})$$

où  $\phi^{in}$  est le champ incident satisfaisant l'équation (I.34) et le champ diffusé  $\phi^d$  satisfaisant quand à lui

$$\phi^d(t, x) = \iint G_0(t - \tau, x - z) V(z) \partial_\tau^2 \phi(\tau, z) d\tau dz \quad (\text{I.44})$$

avec fonction de réflectivité du sol  $V$  telle que :

$$V(z) = \frac{1}{c^2(z)} - \frac{1}{c_0^2}. \quad (\text{I.45})$$

Pour les fréquences utilisées en Radar nous pouvons considérer que la pénétration dans le sol est très faible et que donc le support de  $V$  peut ne se prendre que sur une très faible épaisseur.  $V(z)$  est dépendant de trois coordonnées, nous pouvons néanmoins dans le cadre d'un sol plat supprimer la composante liée à l'altitude, ce qui peut ne pas être facilement applicable si le porteur (avion) vole à de faibles altitudes.

Le problème ici restant qu'on a le produit de deux fonctions inconnues ( $\phi$  et  $V$ ) pour une seule équation et donc l'apparition d'une non linéarité dans la résolution de ce problème inverse. C'est pourquoi nous nous plaçons généralement dans le cadre de l'approximation de Born :

$$\begin{aligned} \phi^d(t, x) &\approx \phi^B(t, x) = \iint G_0(t - \tau, x - z) V(z) \partial_\tau^2 \phi^{in}(\tau, z) d\tau dz \\ &= \int \frac{V(z)}{4\pi|x - z|} \partial_\tau^2 \phi^{in}(t - |x - z|/c_0, z) dz \end{aligned} \quad (\text{I.46})$$

Grâce à cette approximation nous avons donc plus que l'inconnu  $V$ . Néanmoins cette approximation n'en est pas toujours une bonne. D'autres linéarisations de la diffusion comme l'approximation de Kirchhoff [42] existent mais ne sont pas souvent utilisées dans le domaine des radars à cause des longueurs d'ondes employées.

Néanmoins nous n'avons jusque là pas pris en compte la principale caractéristique du SAR, à savoir le mouvement du porteur. En effet, le SAR émet une série de champs magnétique suivant la forme trouvée à l'équation (I.41) et avec une antenne qui se déplace sur la trajectoire. Donc le champs incident s'écrit dans le cadre du SAR comme une somme de champs incidents, chacun de ces champs correspondant à une position de l'antenne :

$$\phi^{in}(\tau, z) = \sum_n \phi_n^{in}(\tau, z) \quad (\text{I.47})$$

avec, si nous considérons  $T$  la durée constante entre chaque position et  $x^n$  la position de l'antenne à la  $n$ -ième position,

$$\phi_n^{in}(\tau, z) \approx \frac{P(\tau - nT - |z - x^n|/c_0)}{4\pi|z - x^n|} \overrightarrow{w(z - x^n)}. \quad (\text{I.48})$$

Donc en appliquant l'approximation de Born et la formule sur le champ diffusé calculé précédemment, le champ diffusé dû à la  $n$ -ième émission, mesuré au centre de l'antenne

vaut :

$$S_n(t) \approx - \int \omega_0^2 \frac{P(t - nT - 2|z - x^n|/c_0)}{4\pi|z - x^n|} \frac{V(z)}{4\pi|z - x^n|} w(\overrightarrow{z - x^n}) dz. \quad (\text{I.49})$$

On remarquera le terme  $2|z - x^n|/c_0$  correspondant au temps de trajet aller-retour. Le terme au dénominateur représente l'étalement géométrique de l'onde sphérique émise par l'antenne au point  $z$ . En pratique, le signal reçu n'est pas mesuré sur le centre de l'antenne mais sur l'antenne globale ce qui fera apparaître un terme  $w$  supplémentaire.

En pratique cette formule est encore inutilisable, car depuis le début nous considérons que  $P$  est une fonction Dirac, ce qui n'est malheureusement pas reproductible. Aucune approximation classique du Dirac ne peut être en plus utilisée, car cette approximation revient à utiliser de très faible énergie (signal très court) et donc l'onde réfléchie aurait trop peu d'énergie pour être exploitable. Nous utilisons donc un signal modulé pulsé (un chirp par exemple) qui transmettra une forme d'onde complexe à l'émission, et nous compresserons le signal reçu mathématiquement pour synthétiser une réponse venant d'une impulsion courte.

### Géométrie terrain et chatolement.

Dans une image de radar, une région apparaît comme étant composée de pixels dont les valeurs sont extrêmement dispersées (moins nous avons de vues pour l'image, plus cet effet est important). Cette dispersion donne un aspect de bruit à l'image (granuleux) et ce "bruit" s'apparente à un bruit multiplicatif ou speckle. C'est ce phénomène que les radaristes appellent le chatolement. Ce "bruit" (qui contient des informations importantes sur le capteur et la surface observée) empêche une bonne interprétation des images sans aucun traitement (difficulté à trouver les contours, à détecter les petits objets, ...), il faudra donc appliquer un filtrage (terme mal choisi car le chatolement n'est pas un bruit à proprement parlé) pour réduire ce phénomène. Nous pouvons traiter ce problème de deux approches, soit comme un bruit et appliquer une méthode de traitement d'image à base de filtrages mais cette méthode ne permet pas d'extraire les informations du chatolement et n'est pas optimal. Soit nous pouvons modéliser par des approches statistiques [61] le chatolement de la surface observée pour faire un filtre qui peut être vu comme une succession d'opérations de type décision et estimation de paramètres de surface inconnus ce qui peut permettre d'extraire des informations particulières.

La deuxième famille de problèmes sont les phénomènes de repliements, de dilations ou de parties cachées de l'image dûs au relief de la surface observée (cas très important avec un SAR aéroporté). En effet il suffit par exemple d'avoir un relief avec une pente plus grande que l'angle d'incidence du rayonnement pour avoir une partie du relief plongée dans une "ombre" à l'instar de la lumière naturelle. Dans un autre cas une pente positive orientée vers le radar feront apparaître des pixels plus gros que ceux sur sol plat (phénomène de dilatation), etc.

Le dernier problème est la difficulté à détecter les objets en mouvement. Si l'objet est en mouvement, cela va rajouter un changement de fréquence (phénomène Doppler) ce qui viendra fausser en partie notre interprétation de la position de l'objet si nous utilisons un algorithme prenant en compte l'effet Doppler. Ceci vient se rajouter au phénomène de

chatoient qui complique la détection des objets en mouvement.

On pourrait aussi souligner le problème lié à la trajectoire du porteur qui peut subir des phénomènes de tangage, de roulis, de déviation... où de la multiplicité des antennes de réceptions qui crée le problème de "Range cell migration" et ces questions ont notamment été traitées par [1].

#### I.4.2 Algorithme de reconstruction d'image basé sur les équations de Maxwell

La plupart des algorithmes de reconstruction d'image SAR sont basés sur la notion de filtres adaptatifs : à chaque vue (pour chaque  $n$ ), un filtre adapté est appliqué au signal  $S_n(t)$  :

$$I_n(y) = \int P(t - nT - \bar{2}|y - x^n|/c_0) S_n(t) dt \quad (\text{I.50})$$

Cela corrèle le signal reçu avec un signal proportionnel à celui dû à un point de diffusion à la position  $y$ . En utilisant l'expression (I.49) et en changeant l'ordre d'intégration, nous obtenons :

$$I_n(y) \approx \int W_n(y, z) \frac{-\omega_0^2 V(z)}{(4\pi|z - x^n|)^2} dz \quad (\text{I.51})$$

avec

$$W_n(y, z) = \overrightarrow{w(z - x^n)} \int P(t - nT - \bar{2}|y - x^n|/c_0) P(t - nT - 2|z - x^n|/c_0) dt \quad (\text{I.52})$$

qui représente la réponse impulsionnelle d'un système avec une seule position. L'idée clé du SAR est que cette réponse impulsionnelle peut se rapprocher de façon extrêmement proche d'une fonction Dirac en sommant sur tous les  $n$ , c'est-à-dire en combinant les informations venant des multiples positions de l'antenne et ainsi en synthétisant une ouverture d'antenne beaucoup plus grande. Donc l'image finale sera

$$I(y) = \sum_n I_n(y) \approx \int W(y, z) \frac{-\omega_0^2 V(z)}{(4\pi|z - x^n|)^2} dz \quad (\text{I.53})$$

avec la réponse impulsionnelle :

$$W(y, x) = \sum_n W_n(y, z) \quad (\text{I.54})$$

$W$  est appelé la fonction d'ambiguïté généralisée du système SAR. Et en prenant  $P$  comme étant un chirp ou une autre forme d'onde modulée,  $W$  devient une approximation de la fonction Dirac. L'étude de  $W$  permet en outre de déterminer les résolutions radiales du radar comme montré dans de nombreux travaux comme [21], la résolution s'améliorant avec la qualité de l'algorithme de compression. La résolution azimutale étant quand à elle égale à  $L/2$ , ce qui implique que plus l'antenne est petite, plus la résolution azimutale est bonne. Néanmoins il faut quand même que l'antenne soit suffisamment large pour assurer son bon fonctionnement. Comme pour la résolution radiale, il existe un algorithme de compression azimutale comme la Range Migration Curve.



### Reconstruction d'images par rétroprojection et transformée de Fourier.

Comme l'a démontré Munson et al. [52] dans le cadre du radar monostatique (source et récepteur au même endroit contrairement au cas du bistatique), du fait de la taille faible de l'antenne, la résultante de tous les échos du sol éclairé par l'impulsion émise peut être vue d'un point de vue intégrale comme une transformée de Fourier. Ainsi le signal reçu est donc un point de la transformée de Fourier du sol éclairé. Le déplacement de l'avion permet d'avoir les autres points dans l'espace de Fourier et avec des algorithmes d'inversion de transformée de Fourier, nous pouvons reconstruire le sol. Pour améliorer encore la qualité de reconstruction, nous pouvons utiliser les codes développés pour l'imagerie médicale et la tomographie : à savoir les algorithmes de rétroprojection rapide.

## I.5 Conclusion

L'imagerie est un domaine très vaste de part sa multitude de forme et de technique. L'un des outils qui permet de traiter les problèmes inverses qui découlent de la reconstruction d'image est la transformée de Radon, or cette dernière n'est utilisée qu'en grande partie pour le problème de la tomographie par rayons X classique. Cet outil s'il était généralisé pourrait ouvrir la voie vers de multiples nouvelles modalités ou proposer des solutions pertinentes à d'anciens problèmes. C'est à cela que mes travaux se sont attelés. Nous avons pu notamment voir que l'imagerie par émission souffre de dégradations sérieuses (perte de contraste, flou, fausses détections de sources ...) à cause du rayonnement diffusé. La généralisation de la transformée de Radon sur des lignes brisées que nous verrons dans le chapitre 2 peut par exemple amener vers de nouvelles modalités de tomographie qui permet d'utiliser judicieusement les photons diffusés. On peut tout aussi bien utiliser la transformée de Radon généralisée en dehors du domaine médical, comme nous le verrons dans la partie 3 avec une application dans le domaine du radar.

# La transformée de Radon sur lignes brisées en forme de lettre V

---

En 1997, Basko [6] est le premier à introduire l'idée d'une transformée de Radon sur une paire de demi droites formant le motif d'une lettre V en essayant de modéliser la formation d'image tomographique utilisant une caméra Compton unidirectionnelle [74]. Dans ce cas précis l'axe de symétrie de la ligne brisée était non fixe et pouvait tourner autour d'un point du plan représentant la couche de détecteur (où se produit la diffusion dans une caméra Compton), mais l'inversion de cette transformée n'a pas été trouvée analytiquement. Il faudra ensuite attendre les travaux de Nguyen [51] et de Florescu [26] sur des géométries à axe fixe pour voir l'apparition des premières transformées de Radon sur des lignes brisées inversibles analytiquement.

Dans ce chapitre nous allons dans un premier temps mettre en œuvre le calcul analytique des problèmes direct et inverse d'une classe de transformée de Radon sur des lignes brisées avec une direction des axes de symétrie fixée (TRV).

Nous allons donc étudier la TRV dans plusieurs procédés d'imagerie : le premier où nous incorporerons un miroir pour aboutir à une tomographie par transmission et réflexion de rayons X, le second est l'imagerie d'émission à partir du rayonnement gamma diffusé et le troisième est la toute première bimodalité en tomographie utilisant le rayonnement diffusé. Dans ces nouvelles imageries le mouvement du détecteur est réduit au minimum alors que dans la tomographie conventionnelle la rotation relative entre le détecteur et l'objet sous étude est obligatoire (ce qui peut devenir un problème rédhibitoire dans certaines applications). De plus, nous avons développé un algorithme de correction de l'atténuation innovant pour ces nouvelles imageries.

## II.1 Application de la TRV en tomographie par transmission-réflexion

En tomographie conventionnelle, une source ponctuelle de rayons X calibrée émet à travers une coupe en deux dimensions d'un objet le long d'une ligne droite avant que

chaque photon atteint un détecteur. Dans ce cas précis, l'atténuation subit par le rayonnement est exprimée par la transformée de Radon classique.

Au lieu d'utiliser simplement une représentation sur des lignes droites, nous allons généraliser la transformée de Radon sur des lignes brisées ce qui permet de représenter la mesure de l'atténuation du rayonnement X le long d'une trajectoire en forme de V.

L'idée physique pour réaliser ceci sera de briser la trajectoire rectiligne en utilisant un miroir adapté et cette cassure serait localisée en un point  $\mathbf{R}$  comme le montre la figure II.1(b). Les miroirs qui réfléchissent les rayonnements X ont de nombreuses applications en optique et astrophysique fondamental (NASA ...), nous pourrions citer notamment les miroirs Gobel [36]. Les données requièrent un nombre important d'angle d'incidence  $\theta$  sur le miroir (qui seront obtenu par une variation de la distance  $\mathbf{SD}$  comme sur la figure II.1(a). L'autre paramètre à faire varier sera le point de réflexion  $x_R$  qu'on pourra faire varier par translation de l'objet par exemple.

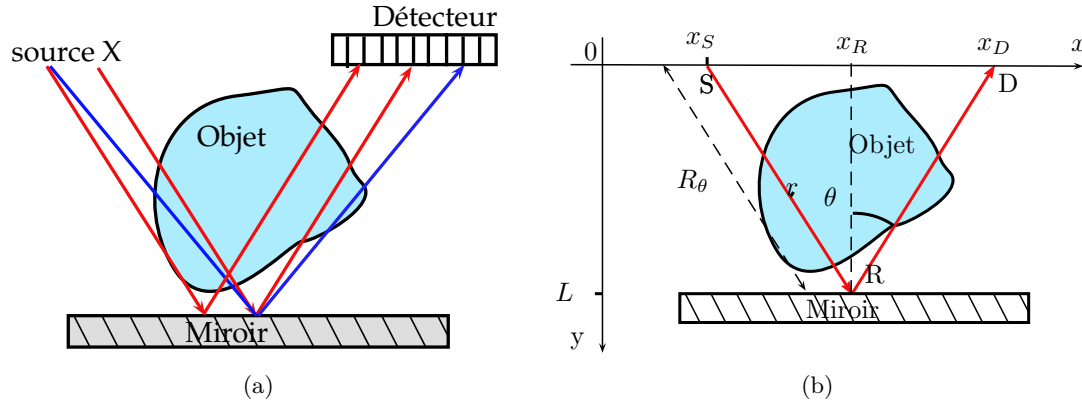


FIGURE II.1 – Principes de fonctionnement de l'imagerie transmission-réflexion

Ce type de système est un nouveau type de scanner couplant les phénomènes de transmission et de réflexion et qui pourrait être utilisé là où le mouvement de rotation est problématique car ici ce dernier est remplacé par un mouvement de translation, ce qui est très appréciable par exemple pour le contrôle de bagages dans les aéroports ou le contrôle de convoyeurs.

### II.1.1 Modélisation de l'imagerie de transmission-réflexion

Les figures II.1(a) et II.1(b) montrent schématiquement le fonctionnement principal de cette nouvelle modalité d'imagerie. Une série de points sources à intensité calibrée est alignée et une autre série de points détecteurs est placée sur cette même ligne. A l'opposé, nous placerons le miroir qui réfléchira le rayonnement émis vers les points détecteurs. Donc l'ensemble de la trajectoire de la radiation s'effectue sur une ligne brisée en forme de V, dont le sommet est à la surface du miroir et dont l'angle d'ouverture varie pour chaque paire source-détecteur.

En translatant parallèlement à l'axe source-détecteur et en considérant tous les angles de réflexion sur le miroir nous pouvons compléter notre jeu de donnée et ainsi remplacer

la rotation habituelle des scanners.

Pour exprimer l'évolution du flux de photons, nous nous plaçons pour l'instant dans un cas optimal (sans diffusion). L'idée basique est de considérer un point source ponctuel  $\mathbf{S}$  émettant un flux de radiation primaire à travers l'objet. En sortie d'objet, les photons sont réfléchis en un point  $\mathbf{R}$  du miroir puis après un passage à nouveau à travers le milieu sont collectés en un point détecteur  $\mathbf{D}$ . La physique du modèle requiert que toute la densité du flux de radiation  $\hat{g}(\mathbf{D})$  enregistrée en un point  $\mathbf{D}$  est due à tous les sites potentiels  $\mathbf{R}$  reliant un point source  $\mathbf{S}$  quelconque à ce même point  $\mathbf{D}$  (chaque couple de point source-détecteur étant symbolisé par une variation d'angle  $\theta$  avec  $0y$ ).

Dans ce cadre, nous pouvons distinguer deux étapes :

1. De  $\mathbf{S}$  à  $\mathbf{R}$  : le flux de photon est incident, possédant une énergie initiale  $E_0$ , est soumis à un facteur d'atténuation dû à l'objet.
2. De  $\mathbf{R}$  à  $\mathbf{D}$  : L'intensité des rayonnements réfléchies est diminuée par un coefficient du miroir  $c(\theta)$  (nous utiliserons par la suite régulièrement la notation  $p(\theta) = \ln(c(\theta))$ ) représentant la réflexion partielle sur de tel miroir. Ce coefficient est malheureusement aussi dépendant de l'angle d'incidence. Puis le flux de photon sera à nouveau soumis à un coefficient d'atténuation en retraversant l'objet.

Force est de constater qu'on aura une perte sèche au niveau du flux importante car il sera soumis à un passage plus long dans un milieu diffusant, aux imperfections du miroir et à un effet de durcissement du flux plus important.

Posons la fonction positive à support compact  $f(x, y)$  représentant la carte d'atténuation inconnue de l'objet.

Par analogie avec la transformée de Radon classique (voir le premier chapitre), nous allons maintenant écrire la transformée directe dans notre cas. Nous utiliserons la paramétrisation  $(x_R, \theta)$  pour notre transformée.

Les données projetées  $\hat{g}(x_R, \theta)$  mesurées au point  $x_D$  ( $x_D = x_R + L \times \tan(\theta)$ ) après avoir été émis à un site  $x_S$  ( $x_S = x_R - L \times \tan(\theta)$ ) et subi un angle de réflexion  $\theta$  (voir Fig. II.1(b)) peut être écrit comme la transformée de Radon suivant :

$$\begin{aligned}
 \hat{g}(x_R, \theta) &= \mathcal{V} \hat{f}(x_R, \theta) \\
 &= \frac{1}{\cos(\theta)} \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) \delta(x - x_R - y \tan(\theta)) dx dy + p(\theta) \\
 &\quad + \frac{1}{\cos(\theta)} \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) \delta(x - x_R + y \tan(\theta)) dx dy \\
 &= \int_0^\infty f(x_R + r \sin(\theta), r \cos(\theta)) dr + p(\theta) + \int_0^\infty f(x_R - r \sin(\theta), r \cos(\theta)) dr
 \end{aligned} \tag{II.1}$$

Cette équation définit la transformée de Radon sur des lignes brisées ( $TRV1$ ) et décrit l'acquisition des données sur les récepteurs et ainsi l'équation de la formation d'images de notre nouvelle modalité d'imagerie par transmission-réflexion. Maintenant nous allons continuer notre analyse avec pour l'instant un coefficient  $p(\theta)$  nul (miroir parfait sans perte). Ce coefficient additif que l'on peut calibrer pouvant être compensé en post traite-

ment .

On constate donc que l'écriture de l'équation (II.1) peut aussi s'écrire si nous négligeons  $p(\theta)$  sous la forme d'une transformée intégrale dans  $\mathbb{R}^2$  avec un noyau de Dirac concentré sur la ligne V :

$$g(x_R, t) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) \kappa(x_R, \theta | x, y) dx dy, \quad (\text{II.2})$$

avec  $t = \tan \theta$  et

$$\kappa(x_R, \theta | x, y) = \delta((x - x_R) \cos(\theta) - y \sin(\theta)) + \delta((x - x_R) \cos(\theta) + y \sin(\theta)) \quad (\text{II.3})$$

Donc l'image d'un point source donné à  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  est la somme de deux distributions de Dirac, qui a un support sur le plan  $(t, x_R)$ , constituant deux demi-droites, avec  $t > 0$ , croisant l'axe des  $x_R$  à  $x = x_R$  et ayant une pente de  $\pm y^{-1}$  i.e.

$$\theta = \arctan \left| \frac{x - x_R}{y} \right| \quad (\text{II.4})$$

Dans la représentation  $(\theta, x_R)$ , le support d'un point source est juste une courbe d'arc-tangente, ce qui implique que le support de cette transformée est non compact dans cette représentation.

L'opérateur adjoint de cette transformée peut s'écrire :

$$\mathcal{V}^\dagger \hat{f}(x_R, \theta) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{1}{\cos(\theta)} g(x + y \tan(\theta), \theta) d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos(\theta)} g(x - y \tan(\theta), \theta) d\theta. \quad (\text{II.5})$$

Cet opérateur revient à un opérateur classique de rétroprojection mais ici pour la transformée de Radon sur lignes brisées.

### II.1.2 Inversion de la transformée de Radon sur des lignes brisées

Nous allons maintenant donner la méthode d'inversion analytique de cette transformée [78].

On utilise maintenant plus naturellement le paramètre  $t = \tan \theta$  en lieu et place de  $\theta$ . Nous pouvons établir une relation entre la transformée de Radon et la transformée de Fourier pour obtenir l'inverse de la transformée de Radon en ligne V  $((TRV_1)^{-1})$ . Pour la transformée de Radon classique, nous avons déjà vu qu'une telle relation existe avec le théorème de la coupe centrale [5]. Notons  $\tilde{f}(q, y)$  (resp.  $\tilde{g}(q, t)$ ) la transformée de Fourier unidimensionnelle suivant la variable  $x$  (resp.  $(x_R)$ ) de la carte d'atténuation  $f(x, y)$  (resp.  $g(x_R, t)$ ),

$$\begin{aligned} g(x_R, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{g}(q, t) e^{2i\pi q x_R} dq \\ f(x, y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(q, y) e^{2i\pi q x} dq. \end{aligned} \quad (\text{II.6})$$

L'équation (II.1) devient avec le changement de variable  $z = r \cos(\theta)$

$$\text{pour } \theta \in [0, \pi/2] \quad \frac{\tilde{g}(q, t)}{\sqrt{1+t^2}} = \int_0^\infty \tilde{f}(q, z) 2 \cos(2\pi qzt) dz \quad (\text{II.7})$$

$$\text{pour } \theta \in [-\pi/2, 0] \quad \frac{\tilde{g}(q, -t)}{\sqrt{1+t^2}} = \int_0^\infty \tilde{f}(q, -z) 2 \cos(2\pi qzt) dz. \quad (\text{II.8})$$

Nous multiplions (II.7) (resp. (II.8)) des deux côtés par  $\int_0^\infty 2 \cos(2\pi zt) dt$  et en utilisant l'identité suivante

$$\int_0^\infty 4 \cos(2\pi \eta x) \cos(2\pi \eta' x) dx = \delta(\eta + \eta') + \delta(\eta - \eta'), \quad (\text{II.9})$$

nous obtenons

$$\text{pour } \theta \in [0, \pi/2] \quad \tilde{f}(q, z) = |q| \int_0^\infty \frac{\tilde{g}(q, t)}{\sqrt{1+t^2}} 2 \cos(2\pi qtz) dt, \quad (\text{II.10})$$

$$\text{pour } \theta \in [-\pi/2, 0] \quad \tilde{f}(q, -z) = |q| \int_0^\infty \frac{\tilde{g}(q, -t)}{\sqrt{1+t^2}} 2 \cos(2\pi qtz) dt. \quad (\text{II.11})$$

Donc pour une plage angulaire complète, nous pouvons utilisé la formule unifiée suivante :

$$\tilde{f}(q, z) = |q| \int_0^\infty 2 \cos(2\pi qtz) \cdot H(z) \tilde{g}(q, t) \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} + |q| \int_0^\infty 2 \cos(2\pi qtz) \cdot H(-z) \tilde{g}(q, -t) \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}, \quad (\text{II.12})$$

où  $H(\cdot)$  est la fonction de Heaviside.

On en déduit que  $f(x, y)$  peut être reconstruite par la transformée de Fourier suivante

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 2 \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} \int_{\mathbb{R}} |q| \cos(2\pi qty) \tilde{w}(y, t) e^{2i\pi qx} dq \\ &= \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} \text{v.p.} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{z-x-ty} \frac{\partial}{\partial z} \hat{w}(y, t) dz \\ &\quad + \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} \text{v.p.} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{z-x+ty} \frac{\partial}{\partial z} \hat{w}(y, t) dz \\ &= \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} (h(x-ty) + h(x+ty)) \\ &= \int_0^{\pi/2} [h(x-y \tan \theta, \theta) + h(x+y \tan \theta, \theta)] d\theta, \end{aligned} \quad (\text{II.13})$$

avec  $\mathcal{F}$  l'opérateur de Fourier, v.p. la valeur principale au sens de Cauchy,

$$h(y, \theta) = \mathcal{F}^{-1} [|q| \cdot \mathcal{F} [w(y, \theta)]] (y) \quad (\text{II.14})$$

et

$$\begin{aligned} w(y, \theta) &= [H(y) \mathcal{V} f(x, \theta) + H(-y) \mathcal{V} f(x, -\theta)] (q) \\ \tilde{w}(y, t) &= (H(y) \tilde{g}(q, t) + H(-y) \tilde{g}(q, -t)) \\ \hat{w}(y, t) &= (H(y) \mathcal{V} f(z, t) + H(-y) \mathcal{V} f(z, -t)). \end{aligned} \quad (\text{II.15})$$

Cette expression est une somme de deux intégrales et se rapproche au final d'une transformée de Radon classique et peut être vue comme une somme de deux transformées de Radon sur des demi-droites. En science de l'imagerie, l'équation (II.13) est appelée une "somme d'image" de données de Radon rétroprojectées ([5]), ce qui permet l'utilisation d'algorithmes de rétroprojection. Ceci a donc l'avantage d'offrir des algorithmes rapides. Techniquement nous allons donc assigner la valeur  $g(x_R, t) = \hat{g}(x_R, \theta)$  à tous les points sur la ligne V, qui ont contribué à donner cette valeur. Nous regarderons les résultats de cet algorithme dans la partie simulation.

### II.1.3 Implémentation et résultats

Bien que faisant partie intégrante de l'étude de notre classe de transformée de Radon sur des lignes brisées, cette application reste une partie marginale de cette étude qui s'est avant tout portée sur l'imagerie Compton qu'on étudiera juste après. Cette partie simulation est donc non exhaustive mais prouve la faisabilité théorique de cette modalité. Dans cette partie, nous simulons la formation d'images et la reconstruction utilisant la  $TRV_1$  et son inverse sur différents objets dans le cadre du contrôle non destructif (une fissure sur une barre plastique et une valise Fig. II.2(a) et II.3(a)). Pour se concentrer sur l'essentiel, nous n'avons pas pris en compte certains défauts techniques comme le bruit électronique des équipements de mesures, de la même manière nous négligerons le bruit photonique poissonnien qui le quel de très nombreuses méthodes de correction, comme celle à base d'ondelettes ou celle de maximum de vraisemblance, existent mais ce n'est pas ce qui nous importe ici. Ici les images originales sont de taille  $128 \times 128$  pixels et la discrétisation du pas angulaire est de  $\Delta\theta = 0.005$  rad. Fig. II.2(b) et II.3(b) montrent les projections de la transformée  $TRV_1$  de la fissure et de la valise respectivement. Les résultats de la reconstruction sont donnés dans les figures II.2(c) et II.4(e). Nous pouvons notamment voir une bonne reconstruction de la fissure, malgré la présence de quelques artefacts.

L'utilisation de la rétroprojection sur les lignes brisées génèrent plus d'artefacts que la rétroprojection sur des droites dans une transformée de Radon classique, ceci étant dû à un nombre plus important de fausses intersections. Heureusement un grand nombre de ces artefacts se trouvent dans les hautes fréquences et donc un filtre d'apodisation (ici un filtre de Hann) classique limite l'influence de ces derniers.

Néanmoins pour obtenir une reconstruction parfaite, il faudrait faire varier notre angle d'incidence sur l'ensemble de la plage angulaire allant de 0 à  $\pi/2$ . Ce qui est bien évidemment impossible car cela voudrait dire faire tendre la distance **SD** (entre la source et le détecteur) vers l'infini pour les angles rasants le miroir. Nous avons donc dû nous limiter fortement à une plage entre 0 and  $\pi/4$  dans nos simulations (314 projections pour chaque position de la source). Ceci entraîne donc une perte d'information très importante qui se retrouve tout particulièrement sur les détails suivant l'axe de translation **SD**.

Ce phénomène se retrouve notamment dans la simulation de la valise Fig. II.3(a) (objet qu'on a choisi pour le contexte d'un contrôle des armes illicites). A cause de cette perte d'information citée plutôt, nous pouvons constater une reconstruction approximative de l'image de la valise (voir Fig. II.3(c)).

Cette image montre d'importants artefacts avec l'apparition de lignes obliques à  $45^\circ$ ,

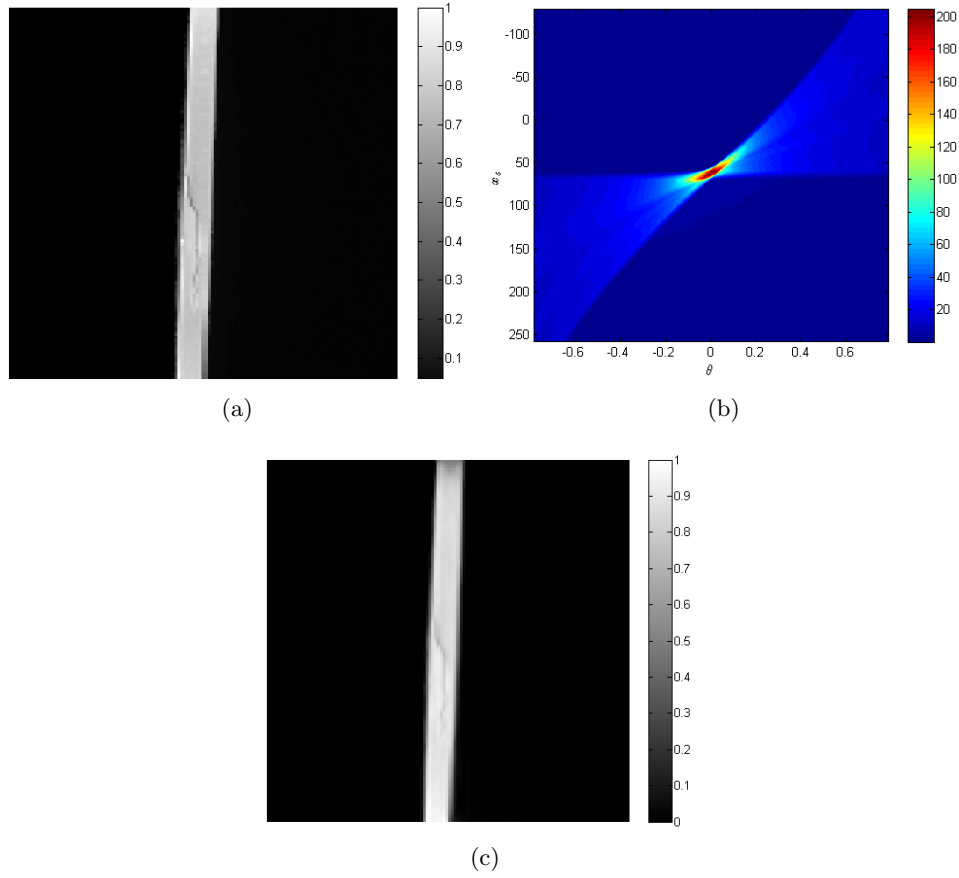


FIGURE II.2 – (a) Image originale de la fissure sur le barreau. (b) Données issues de l'image originale de la Fig. II.2(a) avec la discrétisation angulaire  $\Delta\theta = 0.005$  rad. Sur l'axe des abscisses, nous retrouvons le paramètre  $\theta$  et nous avons le paramètre  $x_S$  sur l'axe des ordonnées. (c) Reconstruction par rétroprojection filtrée de la fissure avec la discrétisation angulaire  $\Delta\theta = 0.005$  rad, nous pouvons notamment voir que les petites structures sont clairement reconstruites.

ce qui correspond à notre borne angulaire ici. Il est important de noter que la perte d'information se retrouve pour tous les contours avec une orientation comprise entre  $\pi/4$  et  $\pi/2$  en terme de  $\theta$  ce qui correspond bien à notre plage réduite.

Il faut donc essayer de compenser cette perte de données.

#### II.1.4 Compensation du manque de données

Une idée possible pour résoudre ce problème est d'utiliser un autre jeu de données en utilisant un autre miroir placé perpendiculairement au premier et donc avec un autre jeu de sources et détecteurs (voir . On peut aussi imaginer seulement une rotation de l'objet étudié de  $\pi/2$  pour obtenir le même résultat.

Cette opération génère donc un autre jeu de données (voir Fig. II.4(c)) correspondant au nouveau set de détecteurs, à partir duquel nous pouvons créer une autre image de reconstruction (Fig.II.4(d)). Une simple fusion (superposition par une simple moyenne de



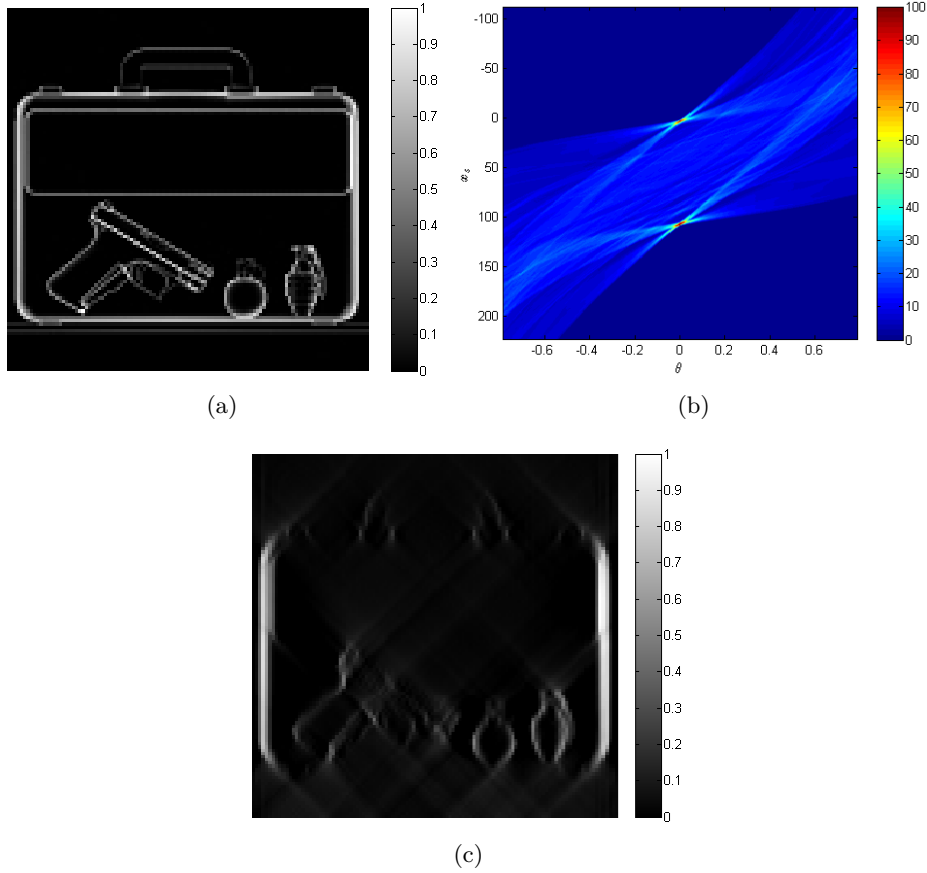


FIGURE II.3 – (a)Image de la valise originale. (b)Projections de l'image montrée en Fig. II.3(a) avec la discrétisation angulaire  $\Delta\theta = 0.005$  rad. Sur l'axe des abscisses, nous retrouvons le paramètre  $\theta$  et nous avons le paramètre  $x_S$  sur l'axe des ordonnées. (c)Reconstruction par rétroprojection filtrée de la valise avec avec la discrétisation angulaire  $d\theta = 0.005$  rad.

ces images après recalage) est suffisante pour donner une image de bonne qualité comme nous pouvons le constater sur la figure II.4(e), ce qui a l'avantage d'être immédiat à implémenter, mais bien entendu d'autres méthodes basées sur des algorithmes de traitement de l'image (méthodes d'extraction de contours ...) peuvent être envisager. Nous pouvons aussi au lieu d'effectuer cette fusion dans l'espace des images, la réaliser dans l'espace des données.

Encore faut-il que cette démarche ait un sens, ce que nous allons démontrer maintenant.

Posons

$$g_1(x_R, \theta) = \int_0^\infty f(x_R + r \sin \theta, r \cos \theta) dr, \quad (\text{II.16})$$

nous pouvons écrire que notre transformée de Radon peut s'écrire comme

$$\mathcal{V}f(x_R, \theta) = g_1(x_R, \theta) + g_1(x_R, -\theta). \quad (\text{II.17})$$

Posons maintenant

$$g_2(x_R, \theta) = \int_0^\infty f(r \cos \theta, x_R + r \sin \theta) dr \quad (\text{II.18})$$

et donc pour la fonction  $f^T$  définie comme  $f^T(x, y) = f(y, x)$ , la  $TRV_1$  de cette fonction peut s'écrire :

$$\mathcal{V}f^T(x_R, \theta) = g_2(x_R, \theta) + g_2(x_R, -\theta). \quad (\text{II.19})$$

Appliquons maintenant le changement de variable  $r' = r + \frac{x_R}{\sin \theta}$  à  $g_1$  :

$$\begin{aligned} g_1(x_R, \theta) &= \int_{\frac{x_R}{\sin \theta}}^{\infty} f(r' \sin \theta, r' \cos \theta - \frac{x_R}{\tan \theta}) dr' \\ g_1(x_R, \frac{\pi}{2} - \theta) &= \int_{\frac{x_R}{\cos \theta}}^{\infty} f(r' \cos \theta, r' \sin \theta - x_R \tan \theta) dr' \end{aligned} \quad (\text{II.20})$$

Si le terme  $\frac{x_R}{\cos \theta}$  est suffisamment petit (ce qui sera le cas en pratique dans l'hypothèse d'une construction d'un appareil imageur), nous pouvons alors identifier la relation entre les mesures  $g_1$  et les mesures  $g_2$  suivante :

$$g_1(x_R, \frac{\pi}{2} - \theta) = g_2(-x_R \tan \theta, \theta). \quad (\text{II.21})$$

Cette relation fait émerger une complémentarité dans les données pour  $\theta \in [0, \pi/4]$  puisque les données manquantes pour  $g_1$  sont obtenues à partir des données  $g_2$ . Cette complémentarité peut également s'interpréter dans le processus de reconstruction :

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \int_0^{\pi/4} (h_1(x - y \tan \theta, \theta) + h_1(x + y \tan \theta, \theta)) d\theta \\ &+ \int_0^{\pi/4} (h_2(y - x \tan \theta, \theta) + h_2(y + x \tan \theta, \theta)) d\theta \\ &= \int_0^{\pi/4} (h_1(x - y \tan \theta, \theta) + h_1(x + y \tan \theta, \theta)) d\theta \\ &+ \int_{\pi/4}^{\pi/2} \left( h_2\left(y - \frac{x}{\tan \theta}, \theta\right) + h_2\left(y + \frac{x}{\tan \theta}, \theta\right) \right) d\theta \end{aligned} \quad (\text{II.22})$$

avec

$$h_1(z, \theta) = \mathcal{F}^{-1} [|q| \mathcal{F} [H(z) \mathcal{V}f(x, \theta) + H(-z) \mathcal{V}f(x, -\theta)] (q)] (z) \quad (\text{II.23})$$

et

$$h_2(z, \theta) = \mathcal{F}^{-1} [|q| \cdot \mathcal{F} [H(z) \mathcal{V}f^T(x, \theta) + H(-z) \mathcal{V}f^T(x, -\theta)] (q)] (z) \quad (\text{II.24})$$

Notre démarche est donc ainsi vérifiée, la transposition étant équivalente à la construction de notre deuxième jeu de données. Dans notre exemple, la superposition de nos images entraîne une perte de contraste due au moyennage, pour lequel nous pouvons éventuellement faire un rehaussement de contraste ou effectuer une autre méthode que la simple fusion des images pour éviter cet effet. Il s'avère donc que cette modalité est théoriquement applicable et peut ouvrir la voie à des nouvelles modalités de scanner si le prix des miroirs à rayons X est abordable, la qualité (coefficient de réflexion différent de 1) et le coût de ces miroirs restant le principal frein de l'utilisation de cette technique sur du court terme. Néanmoins comme précisé plus tôt, l'étude de cas pratiques n'est en soi pas le principal résultat de l'étude de notre classe de transformée de Radon sur lignes brisées, et nous allons maintenant entrer un peu plus dans le cœur de nos contributions.

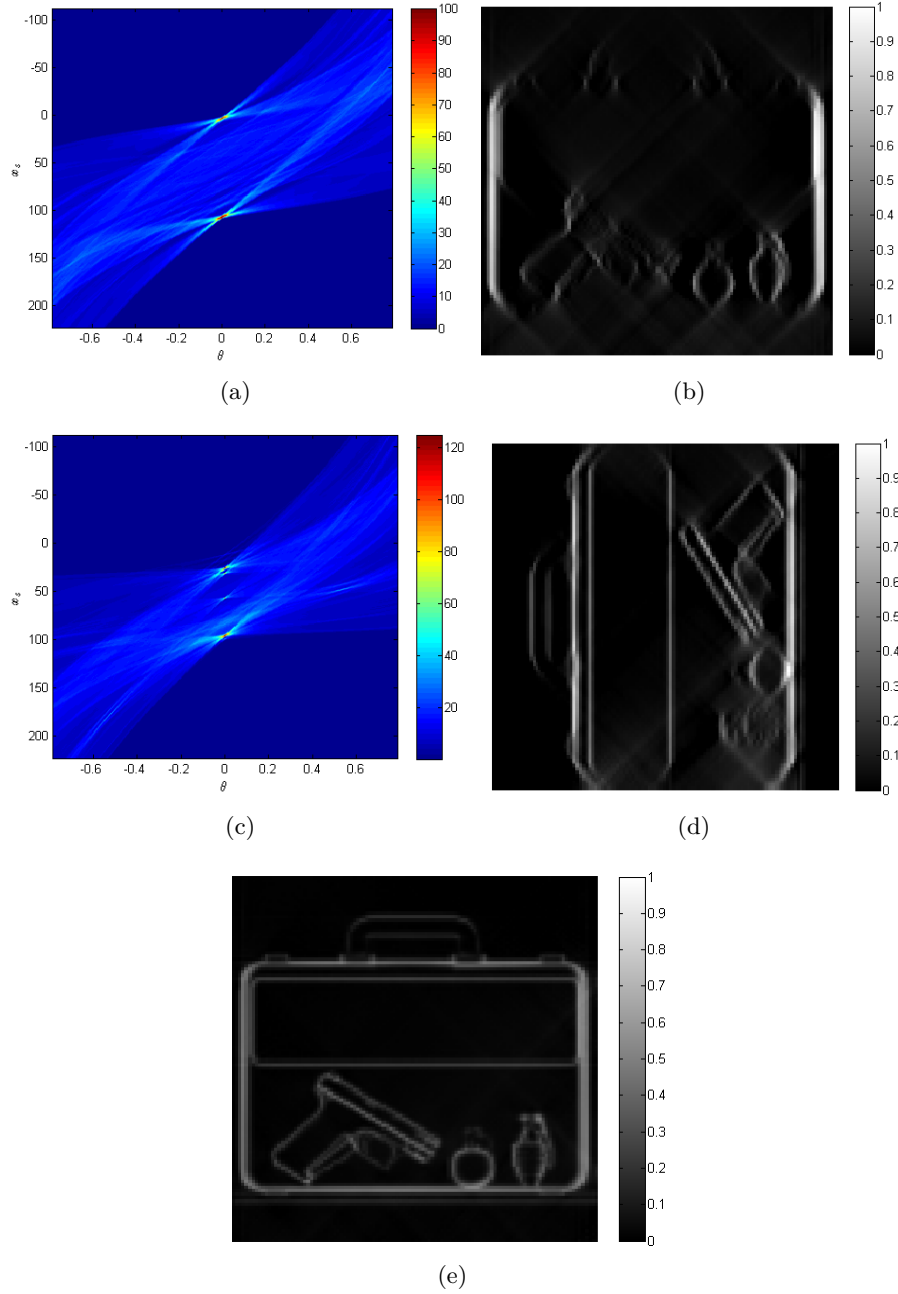


FIGURE II.4 – (a) et (c) Projections pour les deux positions de l'image originale avec la discrétisation angulaire  $\Delta\theta = 0.005$  rad. Sur les axes des abscisses, nous retrouvons le paramètre  $\theta$  et nous avons le paramètre  $x_S$  sur les axes des ordonnées. (b) et (d) Reconstruction de l'image de la valise par rétroprojection filtrée pour chacune des deux positions. (e) Reconstruction globale par fusion des deux images reconstruites, les petites structures dans l'objet sont bien reconstruites maintenant.

## II.2 Application de la TRV en tomographie par émission

A partir de 2002, Nguyen [55] a commencé à proposer une nouvelle approche de l'imagerie gamma par émission s'éloignant des standards de l'imagerie SPECT. Cette nouvelle approche essaie d'exploiter les phénomènes de diffusion pour augmenter la qualité de reconstruction des images. Dans cette partie nous allons étudier l'une des modalités qui en découle et qui se base sur une nouvelle version de la transformée de Radon sur des lignes brisées qu'on appellera par la suite  $TRV_2$ .

### II.2.1 Concept

On considère ici un milieu qui émet des photons de type gamma dont nous cherchons à reconstruire la densité d'émission radioactive. Un photon émis d'un point source  $N$  de l'objet subira une diffusion de Compton sur un point  $M$  d'un détecteur diffusant (voir Fig. II.5). La somme des photons détectés ensuite sur le second détecteur pourra donc bien s'interpréter comme la contribution de tous les points sources sur une paire de droites de sommet  $M$  et avec le même angle de diffusion et donc suivre de transformée de Radon sur des lignes brisées.

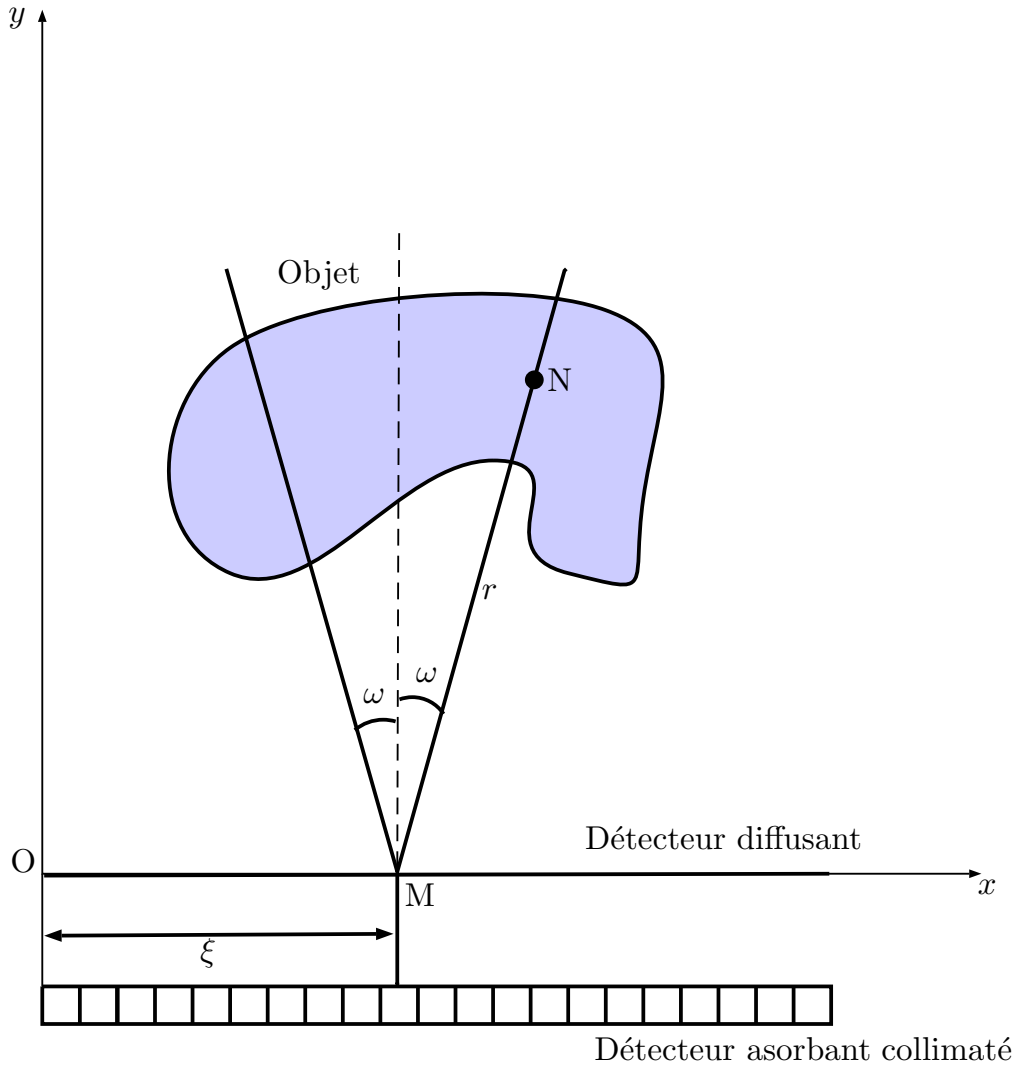
Techniquement ce principe requiert une camera assez similaire à une caméra Compton [74]. L'idée de base de la caméra Compton est de remplacer le collimateur mécanique d'une caméra gamma classique par un collimateur électronique utilisant l'effet Compton dans le but d'améliorer la sensibilité de la caméra. Une caméra Compton est constituée de deux détecteurs. Le premier détecteur est généralement une matrice de détecteurs en silicium. Comme le silicium est un semi-conducteur de numéro atomique faible, il n'a pas assez de pouvoir d'arrêt pour absorber un photon gamma, mais suffisamment pour que ce photon incident subisse une diffusion Compton (on observera la position et l'énergie de l'électron de recul). Le second détecteur qui dans notre cas sera collimaté (contrairement à une caméra Compton classique) quant à lui est plus classique et sert à capter les photons diffusés. Il détermine la position et l'énergie du photon diffusé. Une électronique de coïncidence permet de lier le photon gamma incident au photon diffusé. Avec les mesures d'énergie effectuées, nous pouvons en déduire le niveau d'énergie avant diffusion du photon incident et ainsi trouvé l'angle de diffusion, ce qui nous permet d'évaluer la provenance du photon sur un cône de sommet donné par la position du photon sur le premier détecteur et par l'angle de diffusion et d'axe passant par les positions des photons données par les deux détecteurs (dans le cas bidimensionnel ou collimaté, ce cône est ramené à deux demi-droites comme présenté dans la Fig. II.5). La reconstruction d'un point source s'effectue à la suite de plusieurs mesures en cherchant l'intersection de tous les cônes (ou des demi-droites).

### II.2.2 Formation d'image

Pour une analyse fine, la mesure d'intégration est donnée par la loi photométrique en deux dimensions suivante :

$$m_\sigma(r) = \frac{1}{\pi\sigma} \arctan \frac{\sigma}{2r} \quad (\text{II.25})$$

où  $\sigma$  est la taille linéaire des diffuseurs. Nous ignorerons ici le facteur cinématique de Compton. Si nous considérons une paire de demi-droites se rencontrant en un point  $M$  d'abscisse  $\xi$  sur l'axe  $Ox$ , chacune d'entre elles faisant un angle  $\omega$  ( $0 < \omega < \pi/2$ ) avec l'axe

FIGURE II.5 – Principe de fonctionnement de l'imagerie par émission utilisant la  $TRV_2$ 

Oy. Soit  $f(x, y)$  une fonction continue non-négative de  $L^1(\mathbb{R}^2)$  avec un support compact dans  $\{\mathbb{R}^2 | y > 0\}$ . Nous appelons

$$\mathbb{V}f(\xi, t) = \int_0^\infty dr m_\sigma(r) (f(\xi + r \sin \omega, r \cos \omega) + f(\xi - r \sin \omega, r \cos \omega)), \quad (\text{II.26})$$

la transformée de Radon sur des lignes V (ou  $TRV_2$ ) de  $f$ . Pour simplifier le problème, nous émettrons l'hypothèse classique que  $\sigma$  est très petit, l'équation pourra donc se réécrire comme :

$$\mathbb{V}f(\xi, t) = \int_0^\infty \frac{dz}{2\pi z} (f(\xi + tz, z) + f(\xi - tz, z)), \quad (\text{II.27})$$

où  $t = \tan \omega$  et  $z = r \cos \omega$ .

### II.2.3 Reconstruction d'image

Posons  $(\widetilde{f}(p, y), \text{resp. } \widetilde{\mathbb{V}f}(p, \omega))$  qui est la transformée de Fourier sur  $(x, \text{resp. } \xi)$  de  $(f(x, y), \text{resp. } \mathbb{V}f(\xi, \omega))$ . Nous avons

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \int_{-\infty}^{\infty} dp \, e^{2i\pi px} \mathfrak{F}(p, y) \\ \mathbb{V}f(\xi, \omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \, e^{2i\pi p\xi} \mathbb{V}\mathfrak{F}(p, \omega). \end{aligned} \quad (\text{II.28})$$

On peut donc obtenir à partir de l'équation (II.28) :

$$\widetilde{\mathbb{V}f}(p, t) = 2 \int_0^{\infty} \frac{dz}{z} \widetilde{f}(p, z) \cos(2\pi pzt). \quad (\text{II.29})$$

L'équation (II.29) apparaît donc comme la transformée cosinus de  $\widetilde{F}(p, z) = \frac{\widetilde{f}(p, z)}{z}$

$$\widetilde{\mathbb{V}f}(p, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dz \mathbf{F}(p, z) \cos(2\pi pzt). \quad (\text{II.30})$$

On va utiliser la propriété de la transformée cosinus suivante :

$$\int_0^{\infty} dt \cos(2\pi tv) \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \, e^{2i\pi p\xi} \mathbb{V}\mathfrak{F}(p, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} dz \mathbf{F}(p, z) \frac{1}{2} (\delta(v + pz) + \delta(v_p z)) \quad (\text{II.31})$$

Nous posons  $y = |v/p|$ . Grâce à la propriété précédente, nous pouvons montrer que l'équation (II.30) (pour laquelle nous aurons appliqué des deux côtés de l'égalité l'opérateur intégral  $\int_0^{\infty} dt \cos(2\pi tv)$ ) devient :

$$\widetilde{f}(p, |v/p|) = 2\pi |v| \int_0^{\infty} dt \cos(2\pi tv) \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \, e^{-2i\pi \xi p} \mathbb{V}f(\xi, t). \quad (\text{II.32})$$

$f(x, y)$  est reconstruit seulement pour  $y = |v/p| > 0$  par inversion de la transformée de Fourier sur la variable  $p$  et peut se mettre sous la forme de la triple intégrale suivante :

$$f(x, y) = 2\pi y \int_{-\infty}^{\infty} |p| dp \, e^{2i\pi px} \int_0^{\infty} dt 2 \cos(2\pi pty) \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \, e^{-2i\pi \xi p} \mathbb{V}f(\xi, t), \quad (\text{II.33})$$

Nous obtenons finalement la formule explicite de reconstruction suivante :

$$f(x, y) = -\frac{y}{\pi} \int_0^{\infty} dt \, \text{v.p.} \left( \int_{\mathbb{R}} d\xi \left[ \frac{\mathbb{V}'f(\xi, t)}{(x + ty - \xi)^2} + \frac{\mathbb{V}'f(\xi, t)}{(x - ty - \xi)^2} \right] \right). \quad (\text{II.34})$$

où  $\mathbb{V}'f(\xi, t)$  est la dérivée selon  $\xi$  de  $\mathbb{V}f(\xi, t)$

Il est à noter que la singularité apparente pour  $\omega = \pi/2$  n'existe pas à cause de la limitation du support de  $f$ .

### II.2.4 Résultats

La  $TRV_2$  permet donc de modéliser un procédé d'imagerie par émission utilisant une caméra Compton. Nous allons ici présenter quelques résultats utilisant l'équation (II.34).

Les figures (II.6(a), II.6(b), II.6(c)) montrent respectivement l'image originale d'un fantôme de thyroïde, le jeu de données acquis et la reconstruction par l'algorithme de rétro-projection. Nous pouvons remarquer ici avec une caméra Compton fixe (aucun mouvement de rotation) quelques artefacts liés à l'existence d'intersections des jeux de demi-droites, mais globalement nous avons ici une reconstruction performante, pouvant reconstruire les petites structures et ce sans utiliser plusieurs vues (les différents angles de diffusion venant ici prendre ce rôle), ce qui montre bien la faisabilité de cette imagerie. Plus important encore, l'étude théorique de cette inversion, nous permet d'ouvrir la voie vers une autre modalité de tomographie et une autre transformée de Radon généralisée que nous allons étudier dans la partie suivante.

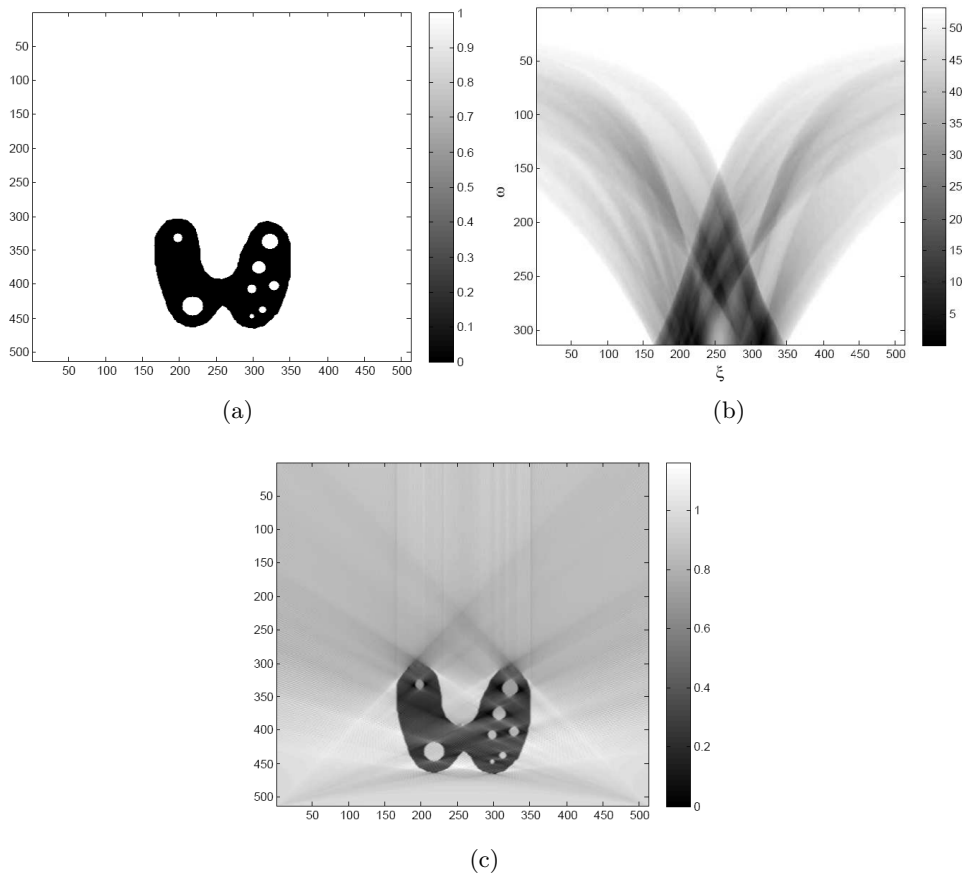


FIGURE II.6 – (a) Fantôme original de la thyroïde. (b) Application de la  $TRV_2$  sur le thyroïdien avec la discrétisation angulaire  $d\omega = 0.005$  rad. Sur les axes des abscisses nous retrouvons le paramètre  $\xi$  et nous avons le nombre de valeurs du paramètre  $\omega$  sur les axes des ordonnées. (c) Reconstruction du fantôme par rétroprojection filtrée

## II.3 Application de la TRV en tomographie Compton par émission

### II.3.1 Contexte de la tomographie Compton

La tomographie Compton est basée, comme son nom l'indique, sur le phénomène de la diffusion Compton. En tomographie traditionnelle, le rayonnement diffusé est filtré comme du bruit car cette diffusion entraîne des fausses détections et est responsable de la perte de photons dans le rayonnement primaire ce qui est très dommageable en imagerie gamma par émission SPECT ou finalement très peu de photons du rayonnement primaire arriveront aux détecteurs. Au final l'imagerie gamma possède, à cause de la perte d'information due à la diffusion, une qualité de reconstruction assez faible et une très grande sensibilité au bruit, à cause du collimateur un seul sur 10000 photons émis arrive au détecteur. A cela s'ajoute la nécessité de filtrer énergiquement après le collimateur, car après ce dernier nous avons encore un ratio de 30 à 40% de photons diffusés.

La tomographie Compton ou tomographie à partir du rayonnement diffusé se propose donc d'utiliser le rayonnement diffusé au lieu de perdre tout ce flux, ce qui peut ouvrir à de toutes nouvelles applications dans de nombreux domaines aussi bien en imagerie biomédicale qu'en astronomie gamma ou en contrôle non destructif. De la toute première modalité Compton proposé par Norton [59] en 1994 aux dernières proposées par Nguyen et Truong [56], ce type de tomographie reste sous estimé et nous nous proposerons dans la suite de ce chapitre, de proposer une méthode novatrice et utilisable pour une modalité Compton.

### II.3.2 La transformée de Radon sur des lignes brisées composées (TRVC)

Le principe de fonctionnement de la modalité de tomographie Compton (CST) est décrite dans la Fig. II.7 dans un cadre idéal (sans atténuation et avec une densité électronique constante  $n_e$ ).

L'idée est ici de considérer un objet contenant une certaine zone radioactive qui va émettre un rayonnement gamma primaire. Mais là où le système va se détacher de la modalité TRV, c'est que l'objet sera ici la source de la diffusion et nous n'aurons pas recours à un diffuseur externe comme avec la caméra Compton. Les photons ainsi diffusés dans l'objet vont perdre de l'énergie et vont être captés par des détecteurs collimatés d'une caméra gamma. La géométrie induite par le phénomène de diffusion nous amène à interpréter les données  $g(\mathbf{D})$  enregistrées en un point  $\mathbf{D}$  du détecteur à une énergie de diffusion donnée  $E_\omega$  comme la somme de toutes les contributions de tous les points sources positionnés sur deux demi-droites de sommet  $\mathbf{M}$  d'inclinaison  $\omega$  par rapport à l'axe perpendiculaire au détecteur et ceci pour tous les points de diffusions possibles  $\mathbf{M}$  le long de cet axe. De par la multitude des lignes brisées possibles, nous parlerons alors de transformée de Radon sur des lignes V composées.

Soit  $a(x, y)$  la fonction d'activité que l'on veut reconstruire, la mesure du flux de densité en un point  $\mathbf{D}$  sous un angle de diffusion  $\omega$ , peut s'écrire :

$$\mathcal{V}a(\xi, \omega) = P(\omega) \int_0^{+\infty} \frac{d\eta}{2\pi\eta} \int_0^{+\infty} \frac{dr}{2\pi r} a(\xi_\pm, \eta + r \cos \omega) \quad (\text{II.35})$$

où  $P(\omega)$  est la section différentielle de diffusion Compton (formule de Klein-Nishina



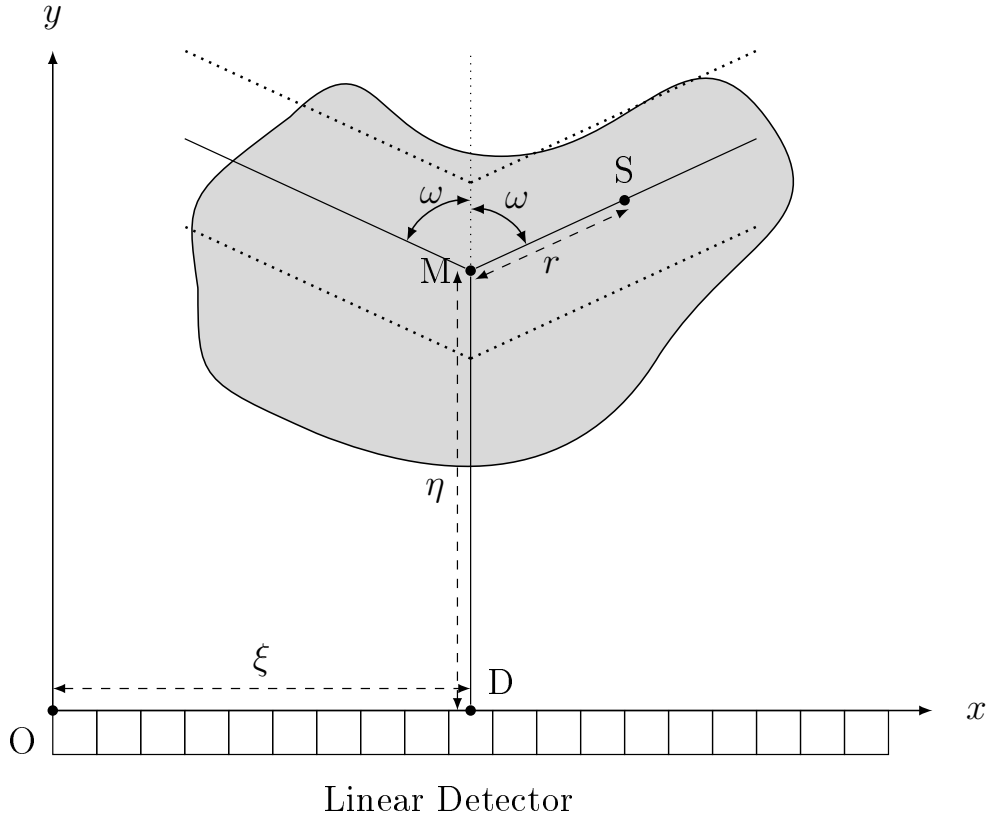


FIGURE II.7 – Principe de la tomographie Compton par émission

[40] et  $\xi_{\pm} = \xi \pm r \sin \omega$ .

L'équation (II.35) définit la TRVC et c'est l'équation de la formation d'image (la transformée directe). On peut aussi la réécrire avec une formulation utilisant le noyau intégrale, l'équation devient alors :

$$\mathcal{V}a(\xi, \tau) = P(\tau) \iint_{\mathbb{R}^2} dx dy \mathcal{K}_{\mathcal{V}}(x, y | \xi, \tau) a(x, y), \quad (\text{II.36})$$

avec  $\tau = \tan(\omega)$ ,  $H(\cdot)$  la fonction de Heavideide et

$$\mathcal{K}_{\mathcal{V}}(x, y | \xi, \tau) = \frac{1}{4\pi^2} \frac{H(y - |x - \xi|\tau)}{|x - \xi| y - |x - \xi|\tau}, \quad (\text{II.37})$$

A partir de là nous pouvons obtenir la PSF de cette transformée. Pour :

$$a_0(x, y) = \delta(x - x_0)\delta(y - y_0), \quad (\text{II.38})$$

on a :

$$\mathcal{V}a_0(\xi, \tau) = P(\tau) \frac{1}{4\pi^2} \frac{H(y_0 - |x_0 - \xi|\tau)}{|x_0 - \xi| y_0 - |x_0 - \xi|\tau}. \quad (\text{II.39})$$

L'équation (II.36) représentant la formation d'images présente des singularités notamment si la distance minimale entre l'objet et les détecteurs est faible. Pour éviter cela, nous considérerons que l'objet d'intérêt est placé à un minimum de distance du détecteur (cette valeur

ne va pas au delà de quelques centimètres, ce qui est cohérent avec des appareils imageurs).

Maintenant que le modèle direct est fixé, il ne reste plus qu'à proposer une formule inverse associée.

### II.3.3 Reconstruction d'image

Considérons maintenant le problème simplifié où nous négligeons le terme  $P(\tau)$  et où la densité électronique est toujours constante. Posons

$$h(x, y) = \int_0^{+\infty} \frac{d\eta}{2\pi\eta} a(x, \eta + y) . \quad (\text{II.40})$$

En suivant un procédé analogue à celui proposé par [78], nous obtenons la formule d'inversion suivante :

$$a(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2i\pi q(y-z)} h(x, z)}{\gamma + i\frac{\pi}{2} \text{sgn}(q) - \ln(2\pi|q|)} dz dq \quad (\text{II.41})$$

avec

$$h(x, z) = \frac{z}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{v.p.} \left( \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathcal{V}\tilde{a}(u, \omega)}{u - x \cos \omega \pm z \sin \omega} du \right) \frac{d\omega}{\cos \omega} + \frac{z}{\pi} \int_0^{\infty} \text{v.p.} \left( \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathcal{V}a(\xi, -\tau)}{\xi - x \pm z\tau} d\xi \right) d\tau, \quad (\text{II.42})$$

où  $\omega = \arctan \tau$ ,  $u = \xi \cos \omega$  et  $\mathcal{V}\tilde{a}(u, \omega) = \mathcal{V}a(\xi, \tau)$ . Cette expression s'écrivant comme une rétroprojection sur des lignes brisées convoluée avec un filtre, il est relativement simple à implémenter et ne nécessite pas une forte régularisation. Le seul problème restant ici est qu'il n'est pas en pratique applicable car il nécessite des hypothèses invérifiables dans énormément d'occasions. En effet ce modèle néglige l'atténuation mais surtout pose l'hypothèse que la probabilité que s'effectue une diffusion en un point est homogène dans tout l'objet (*i.e.* que la densité électronique est homogène dans l'objet), ce qui est en pratique jamais vraie. Nous allons donc voir maintenant un modèle beaucoup plus réaliste.

### II.3.4 Prise en compte d'autres phénomènes physiques dans la TRVC

Dans notre modèle présenté jusqu'alors, nous n'avons pas pris en compte de nombreux phénomènes physiques qui vont venir déformer le flux de photon.

Dans l'évolution de ce flux nous pouvons considérer trois étapes principales :

- Les photons sont émis d'une source interne de l'objet jusqu'à subir une diffusion, le flux sera soumis durant ce trajet à une atténuation  $\mu_a$ .
- Le photon subit une diffusion, la probabilité que le photon soit diffusé en un point  $\mathbf{M}$  étant proportionnelle à la densité électronique en ce point, nous devons considérer la densité électronique  $n_e(\mathbf{M})$  comme un paramètre important et ne plus considérer cette dernière comme constante.
- Le flux de photon diffusé se propage jusqu'à être capté par les détecteurs. Sur ce trajet il subit une atténuation  $\mu_\omega$  qui dépend fortement de l'énergie de chaque photons après la diffusion où nous devons faire attention au phénomène de durcissement du rayonnement.

Si nous ajoutons, tous ces nouveaux paramètres physiques dans notre processus, nous obtenons le modèle physique suivant :

$$\mathcal{V}^\Phi a(\xi, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\eta}{2\pi\eta} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dr}{2\pi r} H(r)H(\eta) P(\tau) n_e(\xi, \eta) e^{-\int_0^\eta \mu_\omega(\xi, \eta') d\eta'} e^{-\int_0^r \mu_a(\xi_\pm, \eta+r' \cos \omega) dr'} a(\xi_\pm, \eta + r \cos \omega). \quad (\text{II.43})$$

Si nous décidons de simuler cette formule pour l'image du fantôme de Zubal réduit à une coupe du cœur (voir Fig. II.8(a)), nous obtenons le jeu de données numériques présenté dans la figure (voir Fig. II.8(b)).

On peut noter qu'on retrouve malgré les altérations la forme caractéristique d'un jeu de données de la transformée de Radon sur des lignes V, c'est à dire la forme en "V" légèrement curviligne pour les hautes valeurs d'angle de diffusion, gardant une cohérence avec la transformée de Radon sans les facteurs physiques et de la fonction de PSF.

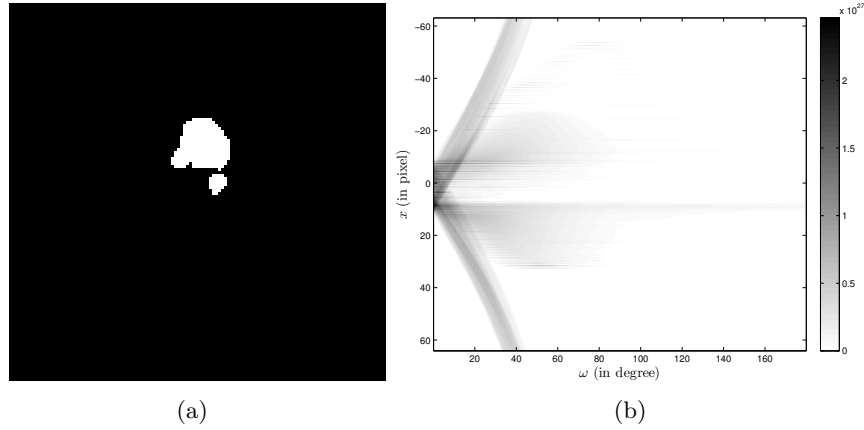


FIGURE II.8 – (a) Fantôme original de la carte d'activité d'un cœur à l'aide d'une coupe de Zubal. (b) Application de la TRVC sur cette image avec prise en compte des paramètres physiques.

L'équation (II.43) est appelée la TRVC atténuée et ne permet malheureusement pas de pouvoir utiliser la procédure d'inversion de sa version non atténuée dans l'immédiat et devient un problème non-linéaire qui ne permet pas en l'état de procéder à une inversion directe. Il faudra donc nécessairement trouver une méthode de correction afin de gérer ces facteurs physiques additionnels pour pouvoir se ramener à un cadre où nous pouvons réutiliser nos algorithmes d'inversion (ceux définis pour la TRVC non atténuée).

La correction des paramètres physiques pour l'obtention d'une inversion de la TRVC atténuée ainsi que les résultats liés à cette transformée seront abordés dans la prochaine partie.

## II.4 Bimodalité en tomographie Compton

Dans l'optique de corriger la TRVC après l'ajout des paramètres physiques, nous nous sommes plongés dans l'étude des différents types de corrections. Cette recherche en plus

d'aboutir vers un nouvel algorithme de correction, le GIPC, nous a aussi amené à mettre au point la toute première bimodalité en tomographie Compton.

#### II.4.1 Le concept d'un nouveau système d'imagerie bimodal

Les systèmes bimodaux en imagerie médicale deviennent de plus en plus importants de part la nécessité de récupérer à la fois des données fonctionnelles et anatomiques du patient et qu'elles soient cohérentes entre elles (pas de décalage temporel entre les deux types de données, ce qui est le cas avec deux examens séparés). C'est ainsi que de nombreux appareils essaient de coupler deux modalités d'imagerie. Notre nouveau concept peut être comparé au système PET/CT dans le sens où il combine à la fois de l'imagerie par transmission et par émission mais s'en éloigne car il permet d'utiliser le rayonnement diffusé du premier ordre par l'effet Compton. Il a donc fallu trouver une modalité de transmission pouvant compléter la TRVC et qui assure une certaine cohérence architecturale. Le choix s'est porté naturellement vers la modalité proposée par Norton [59] et dont les récents travaux de Rigaud [66] ont permis d'améliorer les algorithmes liés à ce procédé. Cette modalité offre l'avantage de reconstruire une carte de densité électronique du milieu diffusant, ce qui est une information nécessaire pour compléter le modèle de la TRVC.

Dans ce contexte, il faut prendre en compte l'ensemble des phénomènes mis en jeu notamment l'atténuation et la non homogénéité de la densité électronique pour la TRVC. Hormis dans le cadre de la transformée de Radon sur des lignes droites pour l'atténuation, l'inversion analytique de tels modèles restent inconnues. Pour résoudre cette difficulté nous proposerons dans la suite de ce chapitre un nouvel algorithme de correction, le Generalized Iterative Pre-Correction algorithm (GIPC) qui est une généralisation d'un des algorithmes couramment utilisés pour la correction de l'atténuation dans le cadre de l'imagerie SPECT, l'algorithme IPC de [48].

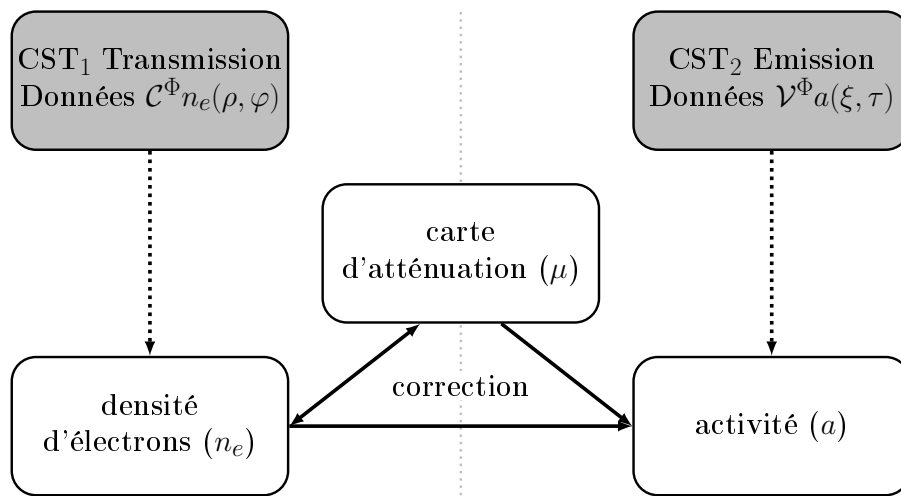


FIGURE II.9 – Concept du nouveau système de bimodalité

### II.4.1.a Couplage avec une modalité associée d'émission : la transformée de Radon avec des arcs de cercles (CART)

#### Modélisation par transformée de Radon sur des arcs de cercles

Avant d'associer les deux modalités, nous allons regarder d'un peu plus près la modalité par transmission. Le principe physique de la modalité de Norton [59] est présenté dans la figure II.10. Dans un contexte idéal (sans atténuation et sans effet de durcissement du rayonnement), cette modalité se base sur une simple idée, un point source **S** émet un rayonnement gamma primaire à travers un objet dans lequel se produira une diffusion à un point **M**. Un détecteur **D** se déplaçant le long de l'axe  $Ox$ -axis collecte, à une énergie  $E_\omega$ , les photons diffusés dans l'objet. La géométrie de la diffusion de Compton implique que tout le flux de photon  $g(\mathbf{D})$  détecté en une position du détecteur **D** issu de **S** sera dû à la contribution de tous les points de diffusion **M** le long d'un arc de cercle allant de **S** à **D** et avec  $\widehat{SMD} = \pi - \omega$  où  $\omega$  est l'angle de diffusion.

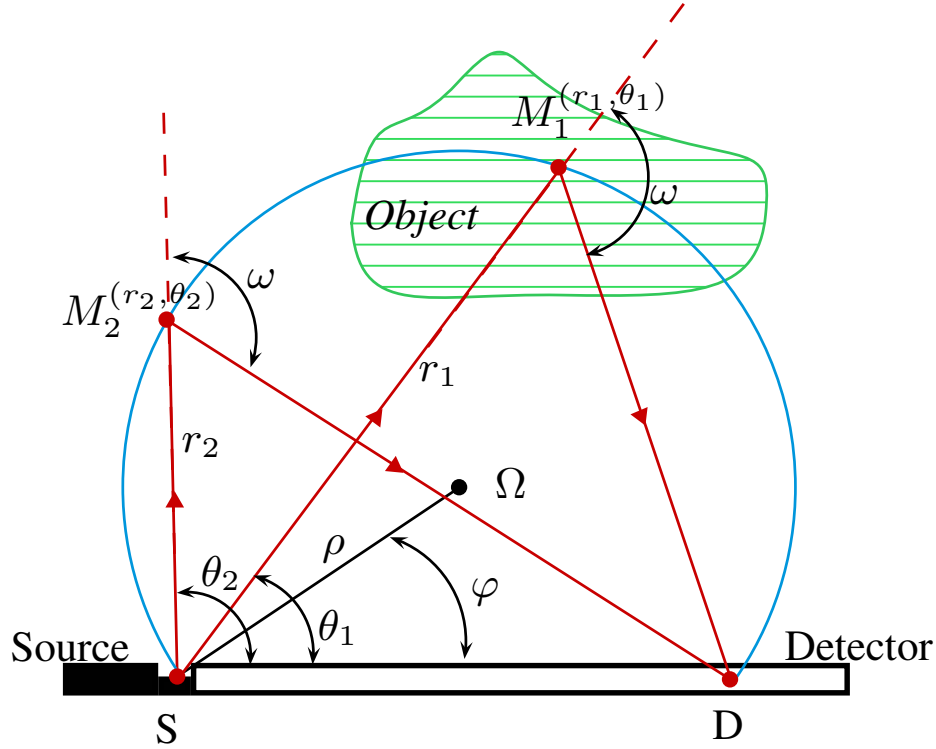


FIGURE II.10 – Principe de la modalité de Norton en tomographie Compton

En absence d'atténuation, Norton a formulé l'acquisition des données de la manière suivante :

$$\mathcal{C}(\rho, \varphi) = \int_0^\pi \int_0^\infty n_e(r, \theta) w(r, \theta; \rho, \varphi) \delta[r - 2\rho \cos(\theta - \varphi)] dr d\theta, \quad (\text{II.44})$$

où  $w(\cdot)$  est

$$w(r, \theta; \rho, \varphi) = \frac{b r s(\theta) \sigma^c(\omega)}{4\pi (2\rho)^3 \sin^2 \theta}, \quad (\text{II.45})$$

avec  $b$  qui représente l'aire de l'élément de détection,  $s(\theta)$  exprimant la dépendance angulaire de la distribution de la source de rayonnement gamma et faisant référence à la section différentielle de Klein-Nishina (see eq. (I.18)). Mathématiquement,  $\mathcal{C}(\rho, \varphi)$  est essentiellement la transformée de Radon de la carte de densité électronique  $n_e(r, \theta)$  sur des arcs de cercle passant par un point fixe  $\mathbf{S}$  d'équation  $r = 2\rho \cos(\theta - \varphi)$ .

Maintenant nous pouvons prendre en compte le facteur d'atténuation pour modéliser ce système d'imagerie, notre modèle de CART atténué s'écrit alors

$$\mathcal{C}^\Phi(\rho, \varphi) = \int_0^\pi d\theta \int_0^\infty dr n_e(r, \theta) w(r, \theta; \rho, \varphi) w_{att}(r, \theta; \rho, \varphi) \delta[r - 2\rho \cos(\theta - \varphi)] \quad (\text{II.46})$$

avec

$$w_{att}(r, \theta; \rho, \varphi) = \exp \left( - \int_0^r \mu_0(t \cos \theta, t \sin \theta) dt - \int_0^{r_1} \mu_\omega(r \cos \theta + t \cos(\omega - \theta), r \sin \theta + t \sin(\omega - \theta)) dt \right). \quad (\text{II.47})$$

et  $r_1 = \frac{r \sin \theta}{\sin(\theta - \omega)}$

Le facteur  $w_{att}$  ne peut pas être séparé en un produit  $w_1(r, \theta) \cdot w_2(\rho, \varphi)$ , c'est pourquoi nous ne pouvons pas utiliser ici les algorithmes de Rigaud [66] dérivé de Cormack [19] directement ici. Pour le moment, nous ne savons pas comment inverser cette transformée analytiquement.

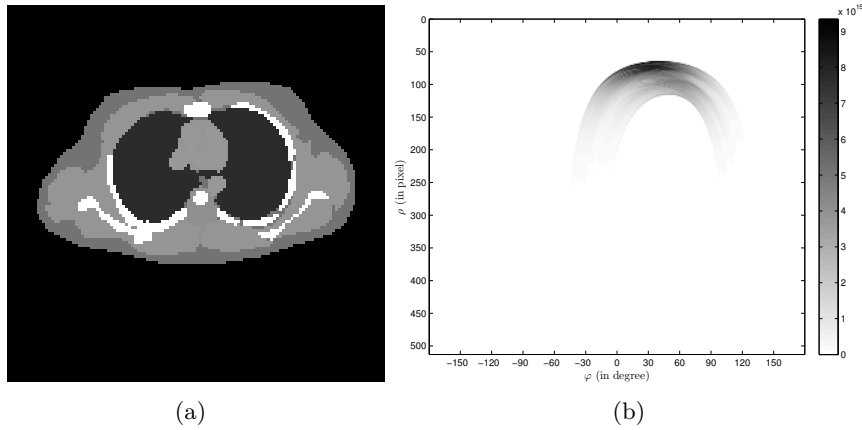


FIGURE II.11 – (a) Fantôme originale d'une coupe thoracique de Zubal. (b) Application de la CART sur cette image avec prises en compte des paramètres physiques.

### Inversion transformée de Radon sur des arcs de cercles

Norton a développé une formule d'inversion, qui pouvait être interprétée comme une procédure de rétroprojection sur des arcs de cercle accompagné par des simulations numériques validant le modèle sans atténuation dans un premier temps. Néanmoins nous utiliserons plutôt dans notre cas la méthode fondée sur les travaux de Rigaud [66] et inspirée par Cormack [19], cette méthode reconstruit une image compatible avec les données

dans l'espace des harmoniques circulaires.

Nous partons de l'équation (II.46). Soit :

$$\begin{cases} \mathcal{C}f(p, \varphi) &= \mathcal{C}^\Phi n_e(\frac{p}{2}, \varphi) \frac{p^4}{P(\varphi + \pi/2)} \\ f(r, \theta) &= n_e(r, \theta) \frac{bs(\theta)r}{8\pi \sin^2 \theta} . \end{cases} \quad (\text{II.48})$$

En substituant (II.48) dans (II.46) nous obtenons :

$$\mathcal{C}f(p, \varphi) = \int_0^\pi d\theta \int_0^{+\infty} dr p f(r, \theta) \delta \{r - p \cos(\theta - \varphi)\} . \quad (\text{II.49})$$

Nous pouvons appliquer ici la transformée de Fourier sur des composantes angulaires (voir [19]) pour  $f$  et  $\mathcal{C}f$ . Nous obtenons :

$$f_l(r) = \frac{1}{\pi r} \int_0^r \frac{e^{-|l| \cosh^{-1}(r/p)}}{\sqrt{(\frac{r}{p})^2 - 1}} (\mathcal{C}f_l)'(p) dp - \frac{1}{\pi r} \int_r^{+\infty} U_{||-1}(r/p) (\mathcal{C}f_l)'(p) dp \quad (\text{II.50})$$

où  $U_{l-1}(\cos x) = \sin lx / \sin x$  est le polynôme de second degré de Tchebychev.  $f(r, \theta)$  est reconstruit à partir de ces composantes en harmoniques circulaires  $f_l(r)$ . Le changement de fonction (eq (II.48)), nous permet d'étudier le modèle de Norton comme l'inversion de la transformée de  $\mathcal{C}$  dans l'espace  $(p, \varphi)$ , l'implémentation numérique ayant été réalisé dans [66].

### II.4.2 Algorithmes de corrections d'atténuation classiques

Très tôt après l'invention de l'imagerie SPECT, la correction de l'atténuation est devenu un enjeu clé pour améliorer la qualité de reconstruction. Nous allons ici passer en revue les algorithmes les plus usités avant de présenter notre algorithme dans la partie qui suivra.

*Remarque :* la plupart des algorithmes de correction nécessite l'extraction des contours du milieu atténuant, ces méthodes sont très bien expliquées dans l'ouvrage [30].

#### II.4.2.a Correction d'un facteur d'atténuation constant

Ces méthodes sont à utiliser en cas de facteur d'atténuation constant ou variant très peu. Elles est donc adaptées en imagerie médicale aux examens de l'abdomen ou du cerveau car tous les tissus présents (si nous enlevons le cas de la boîte crânienne) ont une atténuation sensiblement identique. Ce cas simple a été le premier étudié et donc un nombre important de méthodes existent pour ce cas de figure, mais nous pouvons distinguer trois types d'algorithmes principaux : les méthodes de pré-traitement où la compensation de l'atténuation est effectuée sur les projections avant la reconstruction (en nécessitant des a priori sur l'épaisseur de la source de radiation ou celle du l'objet étudié) et les méthodes de post-traitement où la correction n'intervient qu'après la reconstruction de l'image qui sont en général des variantes de l'algorithme de Chang [14]. Ces méthodes sont généralement très faciles à mettre en œuvre mais n'améliorent la qualité de l'image que pour des objets à géométrie simple et d'activité constante.

**Exemple de méthode de pré-traitement : La méthode de Sorenson [71]**

L'idée est d'obtenir une correction de l'atténuation pour chaque pixel à partir de la moyenne géométrique des projections mesurées  $p'(r, \theta)$  et  $p(r, \theta + \pi)$  par la caméra en deux positions opposées. A cette moyenne un terme de correction en  $\sinh$  est appliqué. Les projections modifiées sont obtenues en supposant l'activité distribuée de manière uniforme (si la source est étendue) et l'atténuation constante  $p(r, \theta)$  supposées être celles obtenues sans atténuation dans l'objet.

$$p(r, \theta) = \sqrt{p'(r, \theta) \cdot p'(r, \theta + \pi)} \mu F L / 2 \frac{e^{\mu F L / 2}}{\sinh \mu F L / 2} \quad (\text{II.51})$$

avec

$\mu$  coefficient d'atténuation linéaire constant,

$L$  épaisseur du milieu atténuant,

$F$  fraction active de  $L$  sur laquelle l'activité est considérée (supposé constant en fonction de  $\mu$ ).

En pratique  $F$  (portion d'activité) n'est pas connue et est fixée généralement à 1 ou à 1/2. Ce choix influence peu les résultats, le facteur correctif ajouté à la moyenne géométrique dépend peu de  $F$ .

**Exemple de méthode de post-traitement : La méthode de Chang [14, 70]**

La méthode de Chang est sans doute la méthode la plus employée. Une reconstruction est appliquée sur les projections mesurées, par exemple une rétroprojection avec un filtre rampe. Une image non corrigée de l'atténuation est alors obtenue. Chaque pixel de celle-ci sera corrigé par la moyenne des coefficients d'atténuation sur tous les angles de projections. Pour le pixel de coordonnées  $x, y$  nous avons le coefficient de correction suivant :

$$C(x, y) = \frac{1}{1/N \sum_{i=1}^N e^{-i I_{\theta_i}}} \quad (\text{II.52})$$

avec

$N$  le nombre de projections sur 360 degrés,

$I_{\theta_i}$  distance du point de l'objet au contour de celui-ci dans la direction de propagation  $\theta_i$ .

Cette méthode, simple à mettre en œuvre, impose de connaître  $\mu$  et le contour l'objet étudié. Elle n'est malheureusement exacte que dans le cas d'une source ponctuelle dans un milieu d'atténuation uniforme. Avec une source étendue, le facteur de correction surestime ou sous estime certains endroits de la distribution.

**II.4.2.b Correction d'un facteur d'atténuation avec une carte d'atténuation hétérogène connu**

Dans la plupart des cas, la carte d'atténuation n'est pas constante et donc nous devons avoir recours à d'autres méthodes. Les méthodes de l'état de l'art se base sur un gros a priori, à savoir la connaissance de la carte d'atténuation.



L'étude comparative de Muraze [53] sur les différentes méthodes itératives a montré que la méthode de Chang est une des plus efficace (convergence la plus rapidement avec une erreur relativement faible) dans le cadre d'une carte constante, Maze [48] a donc proposé une adaptation de ce dernier dans le cadre d'une atténuation non uniforme appelée GCC (Generalized Chang Correction).

### La méthode GCC (Generalized Chang Correction)

Le principe de la méthode GCC reste assez semblable à la méthode conventionnelle de Chang. La matrice de correction change pour refléter les inhomogénéités du milieu. Pour le point de coordonnées  $(x, y)$  de l'objet à reconstruire le coefficient de correction  $C(x, y)$  vaut :

$$C(x, y) = \frac{1}{1/N \sum_{i=1}^N e^{-\int_{C_{\theta_k}^{x,y}} \mu_{x,y}(r, \theta_k)}} \quad (\text{II.53})$$

avec

$C_{\theta_k}^{x,y}$  le chemin en ligne droite du point de coordonnées  $x, y$  de l'objet jusqu'au contour de l'objet dans la direction  $\theta$ ,

$\mu_{x,y}(r, \theta_k)$  valeur de l'atténuation en coordonnées polaires centrée sur le point de coordonnées  $(x, y)$  dans la direction  $\theta_k$ .

L'inconvénient majeur de cette méthode de post-correction est que si l'atténuation produit une perte totale de photons dans certaines zones de l'image, l'activité ne pourra être restituée en quelques itérations, mais seulement après un assez grand nombre.

C'est pourquoi Maze [48] a aussi proposé un algorithme de pré-correction dans le cadre d'une atténuation non homogène connu, le IPC (Iterative Pre Correction) où dès la première itération des résultats quantitatifs commencent à être obtenus.

### La méthode IPC (Iterative Pre Correction)

Les projections sont corrigées avant la reconstruction alors que dans la méthode de Chang, cette correction se fait sur l'image reconstruite. A partir des images mesurées, le but est d'obtenir les images qui seraient mesurées si l'atténuation n'existait pas. L'atténuation de l'activité de chaque point de coordonnées  $(x, y)$  mesurée dans la direction  $\theta_k$  est donnée par le facteur suivant :

$$e^{-\int_{C_{\theta_k}^{x,y}} \mu_{x,y}(r, \theta_k)} \quad (\text{II.54})$$

Pour chaque point d'une projection (image acquise par le détecteur sous un certain angle) un certain nombre de pixels (de l'objet source) participent à sa formation. Entre un point donné de la projection et chaque pixel de l'objet source, le flux de photons entre ces points subit une atténuation donnée. Le coefficient de correction employé pour un point d'une projection (image acquise par le détecteur sous un certain angle) sera la moyenne arithmétique de toutes les atténuations définies précédemment.

$$\sum_{E_k} e^{-\int_{C_{\theta_k}^{x,y}} \mu_{x,y}(r, \theta_k)} \quad (\text{II.55})$$

avec  $E_k$  ensemble des points de la zone d'activité participant à la formation des projections de l'activité dans la direction  $\mu_k$  sur une ligne donnée.

L'étape initiale de l'algorithme IPC permet d'obtenir les premières projections corrigées en divisant point à point les projections originales (images du détecteur) par la matrice de correction proposée. La rétroprojection des premières projections corrigées permet d'obtenir une première estimation de l'objet. Les itérations successives de l'algorithme IPC permettent d'affiner l'estimation de l'objet et l'algorithme suit les étapes suivantes :

- Les projections de la première estimation de l'objet sont simulées en tenant compte de la carte d'atténuation, nous les appelons projections atténuées.
- Les erreurs de la projection atténuée sont calculées par soustraction de celle-ci aux projections originales, nous les appelons projections erreurs.
- Les projections erreurs sont corrigées de la même manière que les projections originales en les divisant point à point par la matrice de correction.
- Les projections erreurs corrigées sont à leur tour rétroprojetées pour obtenir l'objet erreur.
- Enfin cet objet erreur est ajouté à l'estimation de l'objet à l'itération précédente pour donner une nouvelle estimation de l'objet plus précise.

### II.4.3 Algorithme de précorrection d'atténuation généralisé (GIPC)

#### II.4.3.a Principe de notre correction

Jusqu'à présent dans les méthodes classiques de correction d'atténuation, comme le GCC ou le IPC, une connaissance de la carte d'atténuation était requise. Mais cet *a priori* peut être considéré comme trop fort. Notre nouvelle méthode se propose de pouvoir corriger le facteur d'atténuation avec un *a priori* beaucoup plus faible. Étant donné que l'une de nos modalités permet de reconstruire la carte de densité d'électrons, il est possible de faire un lien via la section efficace  $\sigma_E$  entre cette carte et la carte d'atténuation. En effet en un point  $M$ , nous avons bien :

$$\mu_E(M) = \sigma_E(M).n_e(M) \quad (\text{II.56})$$

Une connaissance *a priori* des sections efficaces, permet donc de connaître l'atténuation à partir de la densité électronique. Or la section efficace est fortement corrélée avec le type de matière, il s'en suit qu'on peut créer un algorithme de clustering qui peut pour une valeur de densité électronique associée un type de matière avec une section efficace fixé et donc un coefficient d'atténuation et cela pour chaque point du milieu étudié. Ainsi donc l'*a priori* de la connaissance de la carte d'atténuation devient juste un *a priori* sur le type de matière que compose le milieu étudié. Par exemple dans un contexte cérébrale, nous pouvons supposer qu'une tranche sous étude peut être composée de : matière grise, matière blanche, tissu tumoraux, sang, os ...

Notre schéma de reconstruction et de correction présenté à la Fig.II.9 peut donc se résumer à :

1. Nous obtenons les données brutes sur les détecteurs pour nos deux modalités
2. A partir de ces données brutes pour la modalité par transmission, nous effectuons une première estimation de la densité d'électrons et nous en déduisons une première estimation de la carte d'atténuation.

3. Nous corrigeons nos données grâce à l'estimation de la carte d'atténuation et nous recalculons notre estimation de la carte de densité électronique et celle de la carte d'atténuation. Nous réitérons jusqu'à convergence grâce à notre algorithme de correction.
4. Nous utilisons les cartes d'atténuation et de densité électronique pour corriger notre jeu de donnée issu de la modalité par émission, ce qui nous permet de calculer la carte d'activité.

### II.4.3.b Présentation de l'algorithme

Pour arriver à réussir cette correction, il nous a donc fallu généraliser le concept de l'algorithme Iterative Precorrection [48] à une plus grande variété de transformations afin de résoudre de manière itérative le problème de correction de l'atténuation dans un contexte plus général. Le principe de notre algorithme est donné Fig.II.12.

Nous pouvons le réécrire de manière plus formel dans un cadre très générale. Considérons les deux espaces mesurables  $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^4$ . Soit  $\mathcal{L}_+^2(\mathcal{X})$  (resp.  $\mathcal{L}_+^2(\mathcal{Y})$ ) l'espace des fonctions carré sommables définies sur  $\mathcal{X}$  (resp.  $\mathcal{Y}$ ) tel que :

$$\forall f \in \mathcal{L}_+^2(\mathcal{X}) \quad \text{and} \quad \forall X \in \mathcal{X}, \quad f(X) \geq 0. \quad (\text{II.57})$$

Soit  $T : \mathcal{L}_+^2(\mathcal{X}) \longrightarrow \mathcal{L}_+^2(\mathcal{Y})$  un opérateur intégral tel que

$$(Tf)(Y) = \int_{X \in \mathcal{X}} K_T(Y, X) f(X) dX. \quad (\text{II.58})$$

avec

$$\forall (X, Y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}, \quad K_T(Y, X) \geq 0,$$

donc  $T$  est un opérateur linéaire positif.

Le noyau intégral de  $T$  est soumis à une déformation  $D(Y, X) \in \mathcal{L}^2(\mathcal{X} \times \mathcal{Y})$  telle que

$$\exists D_m \in \mathbb{R}^+ < \infty \quad s.t. \quad \forall (X, Y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}, \quad D(Y, X) \leq D_m \quad (\text{II.59})$$

Donc nous pouvons définir un opérateur dit "déformé"  $T^\Phi : \mathcal{F}_1 \longrightarrow \mathcal{F}_2$ ,

$$(T^\Phi f)(Y) = \frac{1}{D_m} \int_{X \in \mathcal{X}} D(Y, X) K_T(Y, X) f(X) dX. \quad (\text{II.60})$$

De cette définition, nous pouvons en déduire que :

$$d\|Tf\|_2 \leq \|T^\Phi f\|_2 \leq D_m \|Tf\|_2 \quad (\text{II.61})$$

L'injectivité de  $T^\Phi$  pouvant être montrée par l'absurde de l'injectivité de  $T$ .

L'algorithme consiste alors à itérer la récurrence suivante, la preuve de la convergence sera donnée dans la partie suivante :

$$f^{n+1} = f^n + T^{-1} \circ T^\Phi(f - f^n) \quad \text{avec} \quad f^0 = 0. \quad (\text{II.62})$$

Pour appliquer notre algorithme, il faut donc avoir quelques hypothèses satisfaites. Mais si nous considérons le problème de correction pour les transformées de Radon généralisées, nous savons que nos opérateurs sont positifs et que la fonction de distorsion

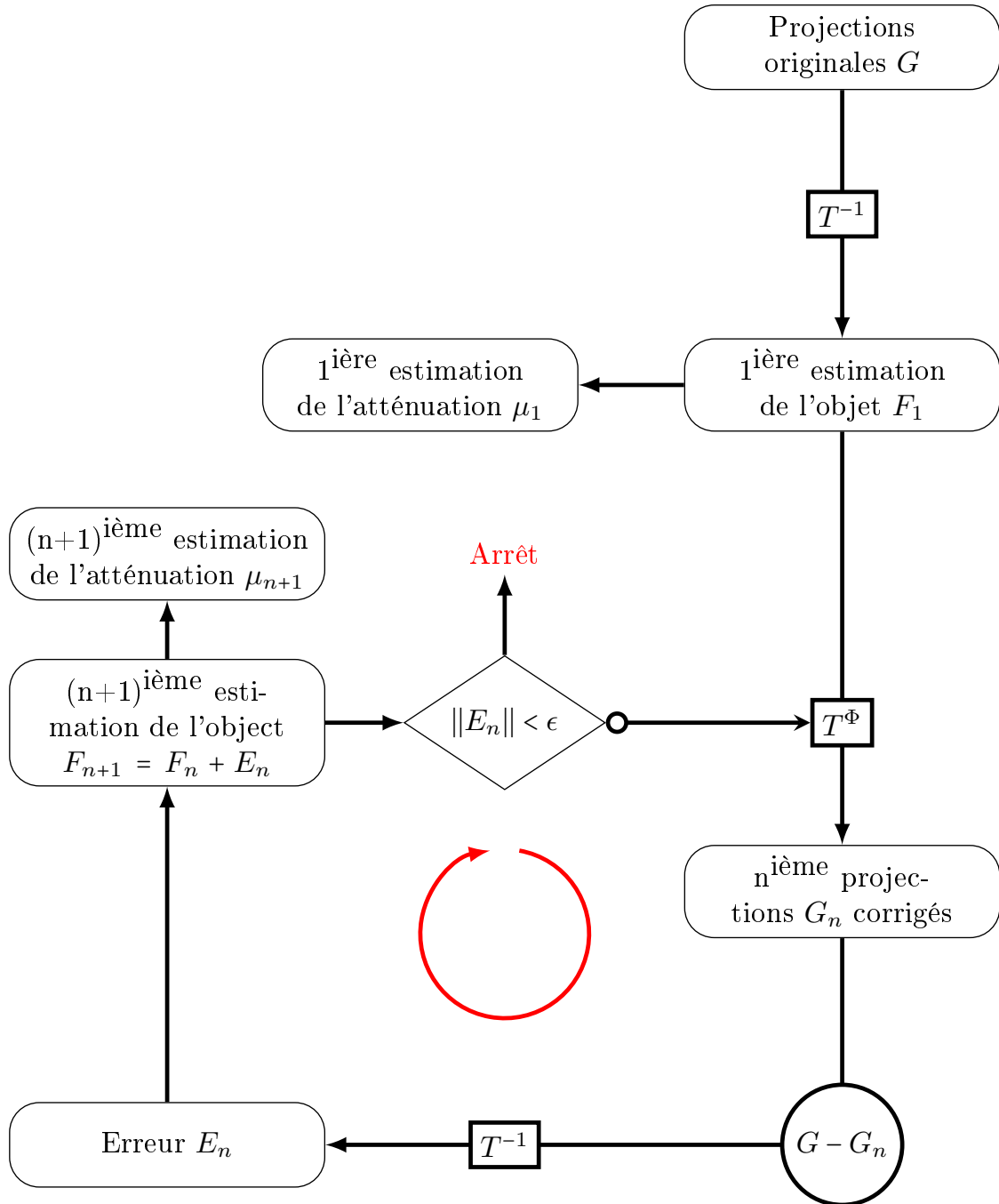


FIGURE II.12 – Principe de fonctionnement de l'algorithme GIPC

vérifie  $\forall (X, Y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ ,  $0 < D(Y, X) < 1$ . Dans notre cas de bimodalité, l'opérateur  $T$  va successivement devenir l'opérateur de Radon CART puis TRVC, pour lesquels les injectivités ont été démontrés [66, 78]. Concrètement pour le critère d'arrêt, nous prendrons soit un nombre d'itérations, soit un seuil entre l'écart sur l'erreur quadratique moyenne entre deux itérations.

#### II.4.3.c Convergence de l'algorithme

Il nous reste donc à prouver que notre algorithme est convergent pour assurer qu'il tendra vers une solution stable et que cette solution est unique.

Pour se faire nous avons besoin de montrer que l'erreur tend vers 0, ce qui signifie que :

$$|f^{n+1} - f^n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0_{\mathcal{F}_1} . \quad (\text{II.63})$$

L'écriture de cette erreur peut être mis sous cette forme

$$\begin{aligned} f^{n+1} - f^n &= T^{-1} \circ T^\Phi (f - f^n) \\ &= (Id_{\mathcal{F}_1} - T^{-1} \circ T^\Phi)^n (f^1) . \end{aligned} \quad (\text{II.64})$$

Nous définissons la norme de notre opérateur  $T$  (en utilisant la norme  $\mathcal{L}_2$ ) comme :

$$|||T||| = \sup_{f \in \mathcal{F}_1} \frac{\|Tf\|_2}{\|f\|_2} , \quad (\text{II.65})$$

la preuve de la convergence devenant ici

$$|||Id_{\mathcal{L}_+^2(\mathcal{X})} - T^{-1} \circ T^\Phi||| < 1 . \quad (\text{II.66})$$

Nous pouvons noter que  $T^{-1} \circ T = Id_{\mathcal{F}_1}$  donc

$$Id_{\mathcal{F}_1} - T^{-1} \circ T^\Phi = T^{-1} \circ (T - T^\Phi) . \quad (\text{II.67})$$

Pour  $f \in \mathcal{F}_1$ , nous avons donc,

$$\begin{aligned} (T^{-1} \circ (T - T^\Phi)) f &= \\ T^{-1} \left( \int_{\mathcal{X}} \left( 1 - \frac{D(Y, X)}{D_m} \right) K_T(Y, X) f(X) dX \right) . \end{aligned} \quad (\text{II.68})$$

On a donc l'existence d'une constante  $M$  telle que

$$\left( 1 - \frac{D(Y, X)}{C} \right) \leq M = 1 - \min_{(X, Y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}} \left\{ \frac{D(Y, X)}{C} \right\} < 1 . \quad (\text{II.69})$$

ce qui implique que :

$$\begin{aligned} (T^{-1} \circ (T - T^\Phi)) f &\leq M \times T^{-1} \left( \int_{\mathcal{X}} K_T(Y, X) f(X) dX \right) , \\ &\leq M \times f \end{aligned} \quad (\text{II.70})$$

et donc

$$|||Id_{\mathcal{F}_1} - T^{-1} \circ T^\Phi||| \leq M^2 < 1, \quad (\text{II.71})$$

ce qui assure la convergence.

Il nous reste donc à prouver que la solution obtenue est unique et que cette solution est bien la fonction  $f$  originale. A la convergence, nous avons :

$$f^{n+1} - f^n = T^{-1} (T^\Phi (f - f^n)) = 0. \quad (\text{II.72})$$

L'injectivité de nos opérateurs impliquent que notre algorithme implique l'unicité de notre solution :

$$\begin{aligned} T^{-1} (T^\Phi (f^{n+1} - f^n)) = 0 &\implies T^\Phi (f - f^n) = 0 \\ &\implies f^n = f. \end{aligned} \quad (\text{II.73})$$

Notre algorithme assure donc la convergence et l'unicité de notre solution.

#### II.4.4 Implémentation et résultats

Nous suivons le schéma Fig. II.9. La première étape est de reconstruire la densité d'électrons, puis une carte d'atténuation est déduite de la première estimation de  $n_e$  et nous appliquons l'algorithme itératif pour obtenir à la fois une carte de densité électronique corrigée et une estimation correcte de la carte d'atténuation. Une fois la première modalité corrigée, nous pouvons reconstruire la carte d'activité issue de la TRVC en la corrigeant grâce à l'algorithme de correction et des deux cartes (carte d'atténuation et  $n_e$ ) obtenues avec la correction de la première modalité.

Fig. II.13 montre les reconstructions des différentes données de l'image du thorax (voir Fig. II.11(a) en transmission et II.8(a) en émission). Nous utilisons les mesures qu'on a pu observer pour la modalité CART à l'image II.11(b) et pour la modalité TRVC à l'image II.8(b). Nous réalisons bien entendu les différentes corrections via l'algorithme GIPC pour lequel nous utiliserons le critère d'arrêt suivant : l'erreur quadratique entre deux itérations soit être inférieure à 0.1%. Nous négligerons les diffusions d'ordre supérieur à un pour garder nos modèles valides, ce qui ajoutera du bruit supplémentaire en pratique. Nous modéliserons donc ce bruit par un bruit poissonnien pour lequel nous choisirons des niveaux de rapport signal sur bruit réaliste en imagerie tomographique à savoir 20dB et 30dB. Nous pouvons constater sur II.13 une bonne qualité de reconstruction aussi bien pour la carte de densité électronique que pour l'activité.

Nous pouvons étudier à partir de là, la qualité intrinsèque apportée par notre algorithme de correction. Pour se faire, nous allons regarder l'évolution du terme d'erreur quadratique moyenne relative (EQMR) suivant le nombre d'itérations. Ce résultat est montré à la Fig. II.14. L'évolution de ces courbes montre clairement la gain en terme de qualité et ce pour plusieurs niveaux de bruit. Cette amélioration est d'autant plus flagrante sur la carte d'activité qui, sans la correction de la densité électronique, possède un niveau d'erreur trop élevé pour être exploitée. Quoi qu'il en soit l'algorithme de correction permet de faire diminuer de façon drastique l'EQMR, même pour un niveau d'erreur de 20dB.

Nous avons donc bien montré la faisabilité de cette bimodalité fondée sur le rayonnement diffusé. Les deux modalités apparaissent réalisables théoriquement, grâce à l'apport

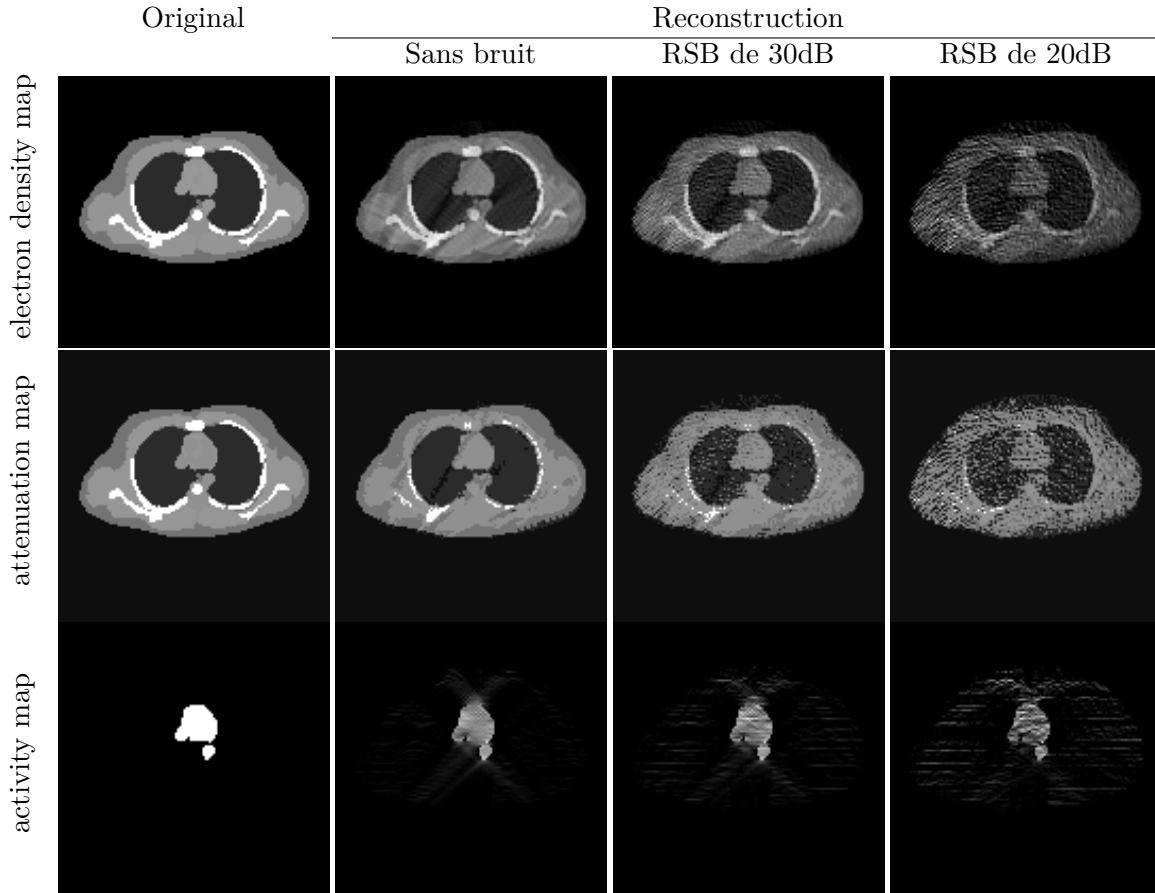


FIGURE II.13 – Différentes reconstructions de la carte de densité électronique, de la carte d'activité et une estimation de la carte d'atténuation pour différent niveau de RSB. Les reconstructions sont obtenues en l'algorithme GIPC et le bruit est généré par un procédé poissonien. Nous commençons l'algorithme à partir des données données dans les figures II.11(b) et II.8(b).

de notre algorithme de correction notamment, et complémentaires, offrant de nouvelles perspectives et de nouvelles approches en imagerie médicale et proposant une alternative possible aux bimodalités classiques.

## II.5 Conclusion

Nous avons donc vu comment la généralisation de la transformée de Radon sur des lignes brisées pouvaient être utilisée concrètement à travers ces trois formes. La première pouvant permettre une reconstruction d'image par transmission en limitant les prises de vu grâce à l'ajout d'un miroir. Les deux suivantes exploitant avantageusement le phénomène de diffusion Compton pour pouvoir faire de la tomographie par émission. La dernière application nous ayant permis d'ouvrir la voie vers une nouvelle modalité de bimodalité tomographique. Ainsi grâce notamment à la création d'un nouvel algorithme de correction des données, nous avons vu comment coupler deux modalités d'imagerie Compton et comment réussir à corriger efficacement les phénomènes physiques d'atténuation et de

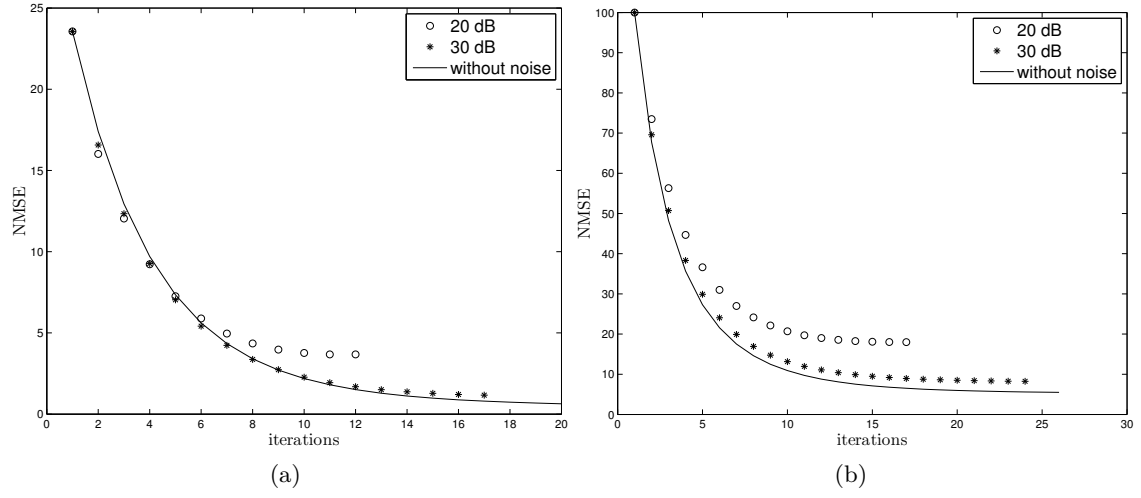


FIGURE II.14 – Évolution de l'EQMR (en %) suivant le nombre d'itérations de l'algorithme pour la correction de la densité d'électrons (a) et pour la carte d'activité (b) pour différents niveaux de RSB. Les différentes courbes s'arrêtent quand le critère d'arrêt de l'algorithme est atteint.

non-uniformité de la densité électronique.

Tous ces résultats prouvent l'intérêt de l'étude des transformées de Radon généralisées sur des lignes brisées et ouvrent la possibilité d'une nouvelle approche de l'imagerie.





# III

Chapitre

## Transformée de Radon sphérique et application en Radar

---

Durant les cinquantes dernières années, la communauté scientifique a développé des systèmes d'imagerie à micro-ondes pour réaliser des images à haute résolution de la surface de notre planète depuis un avion ou un satellite. Ces systèmes, regroupés sous le nom général de radar à synthèse d'ouverture (RSO ou SAR en anglais), ont longtemps été l'apanage des ingénieurs, mais ce thème a été repris depuis une vingtaine d'année par la communauté mathématique pour élaborer de nouveaux algorithmes de reconstruction notamment basés sur ceux appliqués jusqu'alors qu'en tomographie.

C'est dans ce cadre que ce dernier chapitre va s'orienter. Nous allons voir ici comment modéliser et reconstruire des images radars à l'aide de la transformée de Radon sphérique.

### III.1 Motivations

#### III.1.1 Visée latérale et phénomène de symétrie gauche-droite

La plupart des radars à synthèse d'ouverture sont des radars à visée latérale, ce qui signifie que l'antenne est pointée parallèlement à son porteur et donc reconstruit une fauchée qui n'est pas directement sous le porteur mais qui est décalée latéralement. Cette pratique s'est généralisée pour éviter le phénomène de symétrie droite-gauche. En effet si l'antenne est directement pointée sous le porteur, il devient difficile de distinguer si une cible se trouvait à droite ou à gauche à cause de la symétrie du problème. En visée latérale on s'affranchit immédiatement de ce problème. Mais certains SAR s'orientent vers une approche sans visée latérale ce qui est notamment le cas du radar CARABAS [34, 79, 80]. C'est dans le cadre de ce dernier type de radar que notre étude portera.

#### III.1.2 Description du système CARABAS

L'un des exemples les plus connus de SAR sans visée latérale est le système aéroporté suédois CARABAS (Coherent All Radio BAnd Sensing). Ce radar opère à des fréquences relativement basses autour de 10-100 Mhz, avec une bande passante relative très large (90%) alors que la plupart des radars à ouvertures synthétiques fonctionnent plutôt dans

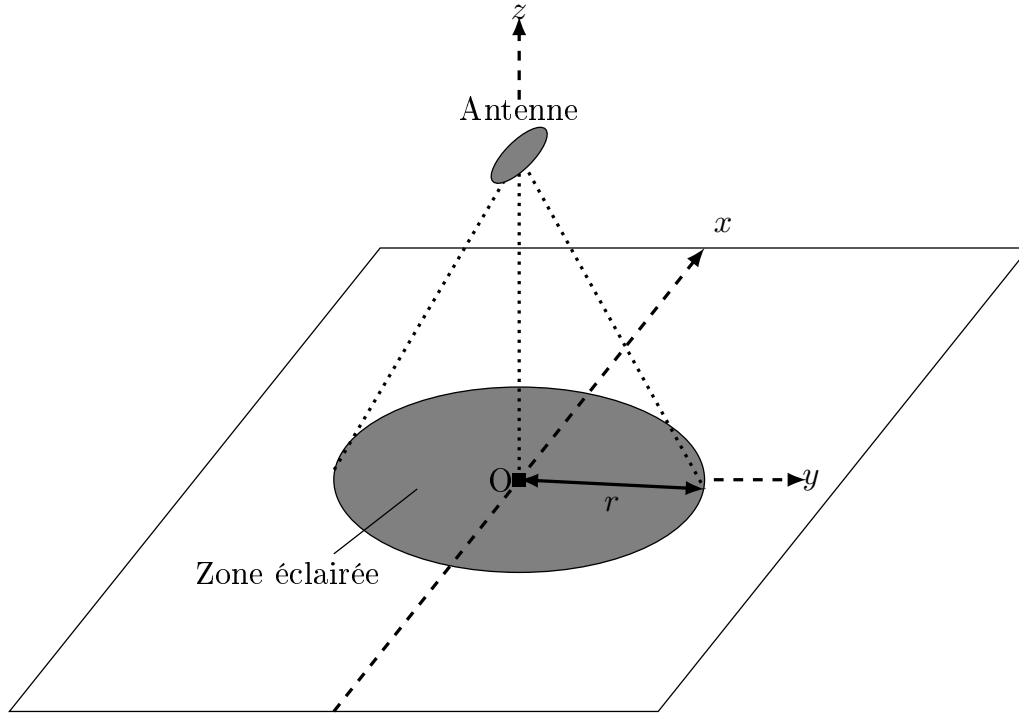


FIGURE III.1 – Principe d'un radar à synthèse d'ouverture CARABAS.

des gammes de 1 à 10GHz avec une bande passante allant de 30MHz à 1GHz (3%). Cette fréquence a un défaut majeur d'avoir une résolution assez faible mais possède l'avantage par contre d'être très peu sensible au bruit multiplicatif de type speckle. En effet ce bruit est avant tout causé par une bande passante relative étroite, ce qui n'est pas le cas pour le radar CARABAS (peu de longueurs d'ondes par cellule de résolution).

Une autre particularité de ce système est que le choix de la taille de l'antenne est de l'ordre de grandeur de la longueur d'onde du radar, ce qui implique que le radar va émettre de façon quasi uniforme dans toutes les directions et par voie de conséquence que son onde peut être considérée comme sphérique.

Plaçons nous dans le cadre d'un radar CARABAS qui se déplace le long d'une trajectoire rectiligne et d'un sol pour l'instant plat. Les échos reçus après un certain laps de temps par l'antenne seront la somme des réflexions de tous les points de l'intersection entre le sol et une sphère centrée sur l'avion, donc de tous les points d'un cercle. Si nous posons  $f(x, y)$  la fonction de réflectivité du sol et si nous introduisons un système de coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$  où l'avion se déplace selon l'axe des  $x$  (voir Fig.III.1), les mesures nous donnent l'intégrale de  $f$  sur un cercle centré sur  $(x, 0, 0)$  et de rayon  $r$  (qui peut être vu aussi comme un paramètre temporel), soit :

$$g(x, r) = \int_0^{2\pi} f(x + r \cos \phi, r \sin \phi) r d\phi. \quad (\text{III.1})$$

On est cependant limité par l'ambiguïté gauche-droite et si nous nous contentions de ce modèle nous ne pourrions reconstruire que la partie impaire de  $f$ . Pour résoudre ce

problème, l'avion est équipé de deux antennes sur chaque côté du porteur. Deux antennes sont donc utilisées pour pouvoir filtrer le signal réfléchi de l'autre côté de l'avion et ainsi, lors de la reconstruction, de ne travailler que sur des moitiés de cercle d'intégration et ainsi de s'affranchir de ce problème de parité.

Ce qui est intéressant dans l'écriture de l'équation (III.1), c'est de remarquer la similitude avec les problèmes classiques en tomographie. Il est donc cohérent d'essayer de modéliser ce problème sous la forme de transformée de Radon et trouver la méthode de reconstruction d'image par l'inversion d'une telle transformée.

## III.2 Modélisation par transformée de Radon sphérique

Jakowatz [37] fut le premier à émettre un lien entre les transformées de Radon et la formation d'image pour le Radar en considérant l'approximation de Fresnel pour l'onde (front d'onde plan). Bien entendu une telle approximation ne permettait pas d'obtenir des résultats satisfaisants. Très vite ce type de travail a été porté par Fawcett [25] pour des fronts d'onde sphériques plus en adéquation avec le radar, travail ensuite amélioré d'un point de vue de l'analyse mathématique par Andersson [2] et Klein [39].

### III.2.1 Modèle de Redding

A partir des travaux d'inversion de la transformée de Radon sphérique mis au point par Andersson et dont les propriétés mathématiques, notamment sur la stabilité, ont été étudiées par Klein, des modélisations du radar à synthèse d'ouverture ont été proposées. Nous nous intéressons ici tout particulièrement au modèle proposé par Redding [65].

Ce modèle étudie le cas d'un radar monostatique, dont la propagation se fait dans un milieu de propagation isotropique, homogène et non dispersif. L'écho radar est modélisé par une somme d'objet à une seule diffusion. Nous utilisons l'approximation "start-stop" (considérant la vitesse du mobile comme très inférieure à celle de la lumière) et nous considérons que l'illumination du sol est constante en transmission, en réception et garde un aspect indépendant de la réflectivité du sol. Finalement nous négligeons dans un premier temps le motif de diffraction de l'antenne car nous considérons que la cible est dans le lobe principal (cette hypothèse est d'autant plus vérifiable dans le cadre du CARABAS) et nous considérons aussi que le facteur d'atténuation en distance est compensé.

La carte de réflectivité d'un objet 3D est représentée par une fonction continue positive  $f(X)$  à support borné dans  $\mathbb{R}^3$ . Ici la réflectivité est l'énergie réfléchie par rapport à l'énergie incidente. Comme l'énergie est proportionnelle au carré de l'amplitude des ondes, nous le calculons dans un cas général comme le coefficient de réflexion au carré, toujours positive ce qui permet de s'affranchir des phénomènes de phase. Pour le radar on parlera plus généralement de surface équivalente radar qui mesure l'efficacité avec laquelle une cible intercepte et renvoie l'énergie radioélectrique et comprend non seulement les effets de réflexion mais aussi ceux de diffusion et de diffraction.

Dans le modèle SAR de Redding [65] la  $TRS$  d'une fonction  $f$  représente l'intégrale de la fonction étudiée sur une sphère de rayon  $r$  centrée en un point  $U = (u_x, 0, u_z)$  et

peut être définie par

$$g(u_x, u_z, r) = \iiint_{\mathbb{R}^3} \delta(r - \|X - U\|_2) f(X) dX. \quad (\text{III.2})$$

où  $\|\cdot\|_2$  est la norme  $L_2$  et  $X = (x, y, z)$ .

$g$  peut aussi s'écrire dans un système de coordonnées sphériques comme :

$$g(u_x, u_z, r) = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(u_x + r \cos \theta \sin \phi, r \sin \theta \sin \phi, u_z + r \cos \phi) r^2 \sin \phi d\phi d\theta, \quad (\text{III.3})$$

avec  $\theta$  l'angle azimutal et  $\phi$  l'angle correspondant au zénith.

Ce type de transformée de Radon sphérique est bien connu pour une reconstruction 2D où l'équation (III.2) est similaire à la transformée de Radon circulaire [64], mais n'est pas très utile en trois dimensions car nous devons faire varier la hauteur (le facteur  $u_z$ ) avec des valeurs négatives pour obtenir une reconstruction satisfaisante, ce qui n'est pas réalisable dans l'optique d'une application en radar SAR.

### Modélisation physique et conséquences sur la modélisation de Redding

Si nous voulons être plus en adéquation par rapport au système radar,  $g(u_x, u_z, r)$  représente le signal reçu en "range-compression" (dû à l'émission qui est le plus souvent de type Chirp) et devrait s'écrire plus formellement comme :

$$g(u_x, u_z, r) = \mu(r) \int_0^\pi \int_0^{2\pi} h(\theta, \phi) f(u_x + r \cos \theta \sin \phi, r \sin \theta \sin \phi, u_z + r \cos \phi) r^2 \sin \phi d\phi d\theta \quad (\text{III.4})$$

avec  $\mu(r)$  est le facteur d'atténuation et  $h(\theta, \phi)$  est la forme exacte du diagramme de l'antenne qui entraîne une distorsion par rapport à un modèle sphérique. Si nous nous basons sur de l'imagerie radar à synthèse d'ouverture portée par un avion, le milieu de propagation est l'air (milieu très peu atténuant), le facteur d'atténuation est très facilement négligeable (ce qui ne sera pas le cas si nous transposons ce modèle au cadre du sonar, autre application possible de la transformée de Radon sphérique). De la même manière le terme lié au diagramme de l'antenne peut être négligé dans la cadre d'un système CARABAS où l'onde est quasi sphérique. A noter enfin qu'on est obligé de considérer l'hypothèse suivante  $f(x, y, z) = 0$  si  $y < 0$  dans le cas d'image non symétrique, pour ne pas tomber dans le cadre de l'ambiguïté gauche-droite, ce qui en pratique sera représentée par l'apport de la seconde antenne sur le porteur pour distinguer les données venant de droite ou de gauche par rapport au vol du porteur.

Un autre problème majeur est la limitation de la bande passante et de l'ouverture synthétique d'un radar.

En effet suivant le paramètre  $r$  (rayon de la sphère), nous avons une limitation de la bande passante causé par le chirp utilisé en émission. Donc si nous considérons notre fréquence  $\rho$  (paramètre fréquentiel lié à  $r$  en temporel),  $\rho \in [\nu_0 - \nu_b/2, \nu_0 + \nu_b/2]$  où  $\nu_0$  est la fréquence centrale de la bande et  $\nu_b$  la largeur de bande passante, nous avons le signal reçu  $g_{fb}$  comme une version fenêtrée fréquentiellement de  $g$  tel que

$$\mathcal{F}_1[g_{fb}](u_x, u_z, \rho) = \Pi\left(\frac{\rho - \nu_0}{\nu_b}\right) \mathcal{F}_1[g](u_x, u_z, \rho) \quad (\text{III.5})$$

avec  $\Pi(x)$  la fonction porte telle que

$$\Pi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [-1/2, 1/2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{III.6})$$

et  $\mathcal{F}_1[g_{fb}](u_x, u_z, \rho)$  (resp.  $\mathcal{F}_1[g](u_x, u_z, \rho)$ ) la transformée de Fourier 1D selon la variable  $r$  de  $g_{bf}(u_x, u_z, r)$  (resp.  $g(u_x, u_z, r)$ ).

De même l'ouverture synthétique ne peut pas être infinie donc cette limitation apportera un nouveau fenêtrage en  $u_x$  et  $u_z$ , telles que nos données reçues  $g_{fa}$  dues à ce phénomène seront :

$$g_{fa}(u_x, u_z, r) = \Pi\left(\frac{u_x}{L_x}\right) \Pi\left(\frac{u_z}{L_z}\right) g(u_x, u_z, r) \quad (\text{III.7})$$

avec  $L_x$  et  $L_z$  les dimensions de l'ouverture. Il faudra bien sûr ensuite considérer les deux phénomènes de fenêtrage ensemble pour avoir l'effet global entraînant des phénomènes de convolution fréquentielle par des sinus cardinaux pour les deux premières variables et une convolution en  $r$  par un sinus cardinal.

### III.2.2 Modification du modèle de Redding et inversion de la transformée de Radon sphérique

#### Transformée de Radon sphérique

Comme nous l'avons vu précédemment, la paramétrisation de Redding implique un problème d'incomplétude très important dans les données liées à la logique d'acquisition des données du radar. Nous proposons ici une nouvelle paramétrisation plus intuitive et mieux adaptée au SAR. Nous prendrons donc un modèle de transformée de Radon sphérique avec une altitude fixe (donc de paramètre constant  $u_z$ ) où l'intégrale serait sur une sphère de rayon  $r$  centrée sur  $V = (u_x, u_y, u_z)$  (see Fig. III.2)

Ici, l'équation (III.2) devient :

$$\mathcal{S}f(u_x, u_y, r) = \iiint_{X \in S(V, r)} f(X) dX = \iiint_{\mathbb{R}^3} \delta(r - \|X - V\|_2) f(X) dX. \quad (\text{III.8})$$

Cette transformée présente l'invariance par translation suivante :

$$(\mathcal{S}f(x - x_0, y - y_0, z))(u_x, u_y, r) = (\mathcal{S}f(x, y, z))(u_x - x_0, u_y - y_0, r). \quad (\text{III.9})$$

Cette propriété se montrera très utile dans l'étude qui suivra.

Étant donné la géométrie, il sera préférable d'utiliser pour l'implémentation les coordonnées sphériques afin de balayer plus régulièrement et plus aisément la fonction sous

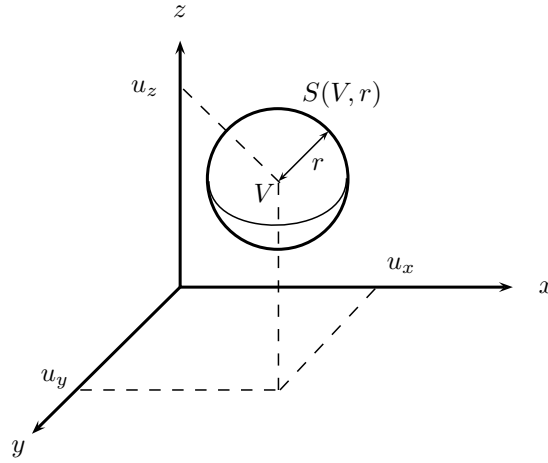


FIGURE III.2 – Géométrie de la transformée de Radon sphérique

étude de la sphère. Donc nous préférons utiliser lors de l'implémentation l'écriture suivante :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{S}f(u_x, u_y, r) &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(u_x + r \cos \theta \sin \phi, u_y + r \sin \theta \sin \phi, u_z + r \cos \phi) r^2 \sin \phi \, d\phi \, d\theta \\
 &= \int_0^\pi \int_{u_z-r}^{u_z+r} \left[ f(u_x + \sqrt{r^2 - (z - u_z)^2} \cos \theta, u_y + \sqrt{r^2 - (z - u_z)^2} \sin \theta, z) \right. \\
 &\quad \left. - f(u_x - \sqrt{r^2 - (z - u_z)^2} \cos \theta, u_y - \sqrt{r^2 - (z - u_z)^2} \sin \theta, z) \right] r \, dz \, d\theta .
 \end{aligned}
 \tag{III.10}$$

### Détermination du PSF

Nous pouvons aussi étudier la PSF (Point spread Function) qui correspond à la réponse impulsionnelle de la transformée c'est à dire à une impulsion  $f_c(x_0, y_0, z_0)$  où  $(x_0, y_0, z_0)$  est un couple de coordonnées quelconques. La réponse impulsionnelle est

$$\begin{aligned}
 \mathcal{S}f_c(u_x, u_y, r) &= \int_{\mathbb{R}^3} \delta(r - \sqrt{(x - u_x)^2 + (y - u_y)^2 + (z - u_z)^2}) \delta(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \\
 &\quad dx \, dy \, dz \\
 &= \delta(r - \sqrt{(x_0 - u_x)^2 + (y_0 - u_y)^2 + (z_0 - u_z)^2})
 \end{aligned}
 \tag{III.11}$$

Ce qui nous donne un PSF en forme de paraboloïde III.3.

### Formule d'inversion

Nous négligeons ici les phénomènes physiques perturbateurs vus dans le modèle original de Redding. L'inversion de la transformée de Radon sphérique a été découverte indépendamment par Fawcett [25] et Andersson [2], Klein[39] ayant par la suite démontrée de nombreuses propriétés pour ces inversions. Nous allons utiliser ces travaux repris par

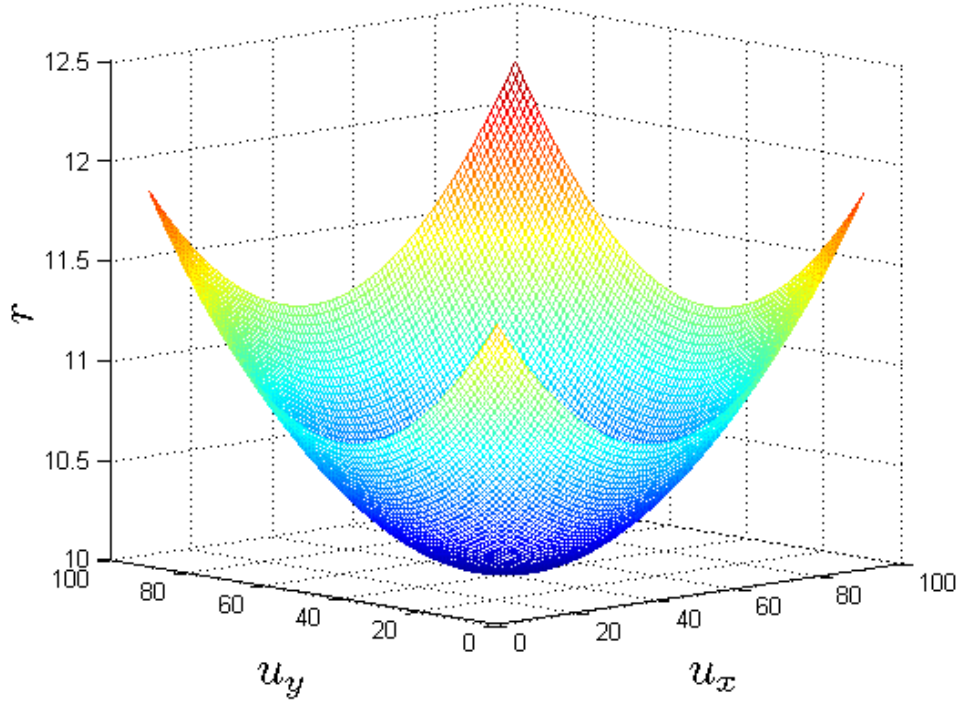


FIGURE III.3 – Représentation d'un PSF pour  $x_0 = 5$ ,  $y_0 = 5$  et  $z_0 = 5$  et  $u_z = 15$ . Nous remarquons la forme caractéristique en paraboloïde

Redding pour créer une nouvelle extension (nouveau paramétrage) à l'inversion de la TRS.

Soit  $\mathcal{F}_2[\mathcal{S}f](v_x, v_y, r)$  la transformée de Fourier sur les deux variables  $u_x, u_y$  de  $\mathcal{S}f(u_x, u_y, r)$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_2[\mathcal{S}f](v_x, v_y, r) &= \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-2i\pi(v_x u_x + v_y u_y)} \\ &\quad \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(u_x + r \cos \theta \sin \phi, u_y + r \sin \theta \sin \phi, u_z + r \cos \phi) r^2 \sin \phi \, d\phi \, d\theta \, du_x \, du_y \end{aligned} \quad (\text{III.12})$$

En changeant l'ordre d'intégration par le théorème de Fubini, nous obtenons

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_2[\mathcal{S}f](v_x, v_y, r) &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} e^{-2i\pi(v_x r \cos \theta \sin \phi + v_y r \sin \theta \sin \phi)} \mathcal{F}_2[f](v_x, v_y, u_z + r \cos \phi) \\ &\quad r^2 \sin \phi \, d\phi \, d\theta \end{aligned} \quad (\text{III.13})$$

où  $\mathcal{F}_2[f](v_x, v_y, z)$  (resp.  $\mathcal{F}_3[f](v_x, v_y, \rho)$ ) est la transformée de Fourier sur les deux variables  $x, y$  (resp.  $x, y, z$ ) de  $f(x, y, z)$ .

Or,

$$\mathcal{F}_2[f](v_x, v_y, z) = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}_3[f](v_x, v_y, \rho) e^{-2\pi i \rho z} \, d\rho \quad (\text{III.14})$$

avec  $z = u_z + t \cos \phi$ .



En utilisant (III.14) et (III.13) et en appliquant une nouvelle fois le théorème de Fubini nous obtenons :

$$\mathcal{F}_2[\mathcal{S}f](v_x, v_y, r) = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}_3[f](v_x, v_y, \rho) \int_0^\pi \int_0^{2\pi} e^{-2i\pi(v_x r \cos \theta \sin \phi + v_y r \sin \theta \sin \phi + \rho(u_z + r \cos \phi))} r^2 \sin \phi \, d\phi \, d\theta \, d\rho \quad (\text{III.15})$$

Nous pouvons utiliser la propriété suivante qu'on retrouve en [28] (équation 4.624) :

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(\alpha \cos \phi + \beta \sin \phi \cos \theta + \gamma \sin \phi \sin \theta) \sin \phi \, d\phi \, d\theta &= 2\pi \int_0^\pi f(R \cos k) \sin(k) \, dk \\ &= 2\pi \int_{-1}^1 f(Rk) \, dk, \end{aligned} \quad (\text{III.16})$$

avec  $R = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$ . Ce qui nous permet de réécrire (III.15) comme :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_2[\mathcal{S}f](v_x, v_y, r) &= \int_{\mathbb{R}} 2\pi r^2 \mathcal{F}_3[f](v_x, v_y, \rho) e^{-2i\pi \rho u_z} \int_{-1}^1 e^{-2i\pi r \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + \rho^2} k} \, dk \, d\rho \\ &= \int_{\mathbb{R}} 2r \mathcal{F}_3[f](v_x, v_y, \rho) e^{-2i\pi \rho u_z} \frac{\sin(-2\pi r \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + \rho^2})}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + \rho^2}} \, d\rho. \end{aligned} \quad (\text{III.17})$$

que l'on peut réécrire à l'aide de la fonction de Bessel d'ordre 1/2  $J_{1/2}(m) = \sqrt{\frac{2}{m\pi}} \sin m$  :

$$\mathcal{F}_2[\mathcal{S}f](v_x, v_y, r) = 2\pi r^{3/2} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}_3[f](v_x, v_y, \rho) e^{-2i\pi \rho u_z} \frac{J_{1/2}(-2\pi r \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + \rho^2})}{(v_x^2 + v_y^2 + \rho^2)^{1/4}} \, d\rho. \quad (\text{III.18})$$

Dans le cadre de nos hypothèses par rapport à l'ambiguïté gauche-droite, nous pouvons donc nous ramener à :

$$\mathcal{F}_2[\mathcal{S}f](v_x, v_y, r) = 2\pi r^{3/2} \int_0^\infty \mathcal{F}_3[f](v_x, v_y, \rho) e^{-2i\pi \rho u_z} \frac{J_{1/2}(-2\pi r \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + \rho^2})}{(v_x^2 + v_y^2 + \rho^2)^{1/4}} \, d\rho. \quad (\text{III.19})$$

Posons le changement de variable suivant :  $\sigma = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + \rho^2}$  d'où nous en déduisons que  $d\rho = \frac{\sigma d\sigma}{\sqrt{\sigma^2 - v_x^2 - v_y^2}}$ . L'équation (III.19) peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_2[\mathcal{S}f](v_x, v_y, r) &= 2\pi r^{3/2} \int_{\sqrt{v_y^2 + v_x^2}}^\infty \frac{\mathcal{F}_3[f](v_x, v_y, \sqrt{\sigma^2 - v_x^2 - v_y^2})}{\sqrt{\sigma^2 - v_x^2 - v_y^2}} e^{-2i\pi \sqrt{\sigma^2 - v_x^2 - v_y^2} u_z} \\ &\quad \sqrt{\sigma} J_{1/2}(-2\pi r \sigma) \, d\sigma. \end{aligned} \quad (\text{III.20})$$

Le théorème de Hankel [11], pour une paire de transformée de Hankel d'ordre  $\nu$ , peut s'écrire comme :

$$\begin{aligned}
f^{H_\nu}(\gamma) &= H_\nu^t[f(t)](\gamma) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \sqrt{t\gamma} J_\nu(t\gamma) dt \\
f(t) &= H_\nu^\gamma[f(\gamma)](t) = \int_{\mathbb{R}} f^{H_\nu}(\gamma) \sqrt{t\gamma} J_\nu(t\gamma) d\gamma
\end{aligned} \tag{III.21}$$

ce qui peut s'écrire après le changement de variable  $\gamma = 2\pi\sigma$  comme :

$$\begin{aligned}
h(\sigma) &= f^{H_\nu}(2\pi\sigma) = H_\nu^t[f(t)](2\pi\sigma) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \sqrt{2t\pi\sigma} J_\nu(2t\pi\sigma) dt \\
f(t) &= H_\nu^{2\pi\sigma}[h(\sigma)](t) = \int_{\mathbb{R}} h(\sigma) \sqrt{2t\pi\sigma} J_\nu(2t\pi\sigma) d\sigma
\end{aligned} \tag{III.22}$$

On peut reconnaître l'écriture (III.22) dans la partie droite de (III.20) si nous posons  $\mathcal{F}_2[\mathcal{S}f_0](v_x, v_y, r) = \frac{\mathcal{F}_2[\mathcal{S}f](v_x, v_y, r)}{r}$  et nous obtenons que (III.22) peut s'écrire comme une transformée de Hankel :

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}_2[\mathcal{S}f_0](v_x, v_y, r) \\
&= \sqrt{2\pi} \int_{\sqrt{v_y^2 + v_x^2}}^{\infty} \frac{\mathcal{F}_3[f](v_x, v_y, \sqrt{\sigma^2 - v_x^2 - v_y^2})}{\sqrt{\sigma^2 - v_x^2 - v_y^2}} e^{-2i\pi\sqrt{\sigma^2 - v_x^2 - v_y^2}u_z} \sqrt{2r\pi\sigma} J_{1/2}(-2\pi r\sigma) d\sigma. \\
&= \frac{1}{2\pi} H_{1/2}^{2\pi\sigma} \left[ \frac{\mathcal{F}_3[f](v_x, v_y, \sqrt{\sigma^2 - v_x^2 - v_y^2})}{\sqrt{\sigma^2 - v_x^2 - v_y^2}} e^{-2i\pi\sqrt{\sigma^2 - v_x^2 - v_y^2}u_z} \right] (r)
\end{aligned} \tag{III.23}$$

si  $\sigma \geq \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$  et par inversion de la transformée de Hankel nous obtenons que dans le domaine de Fourier  $\mathcal{F}_3[f](v_x, v_y, \rho)$  s'écrit comme :

$$\mathcal{F}_3[f](v_x, v_y, \rho) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} |\rho| (\pi \times \sqrt{v_x^2 + \rho^2 + v_y^2} \mathcal{F}_3[R_0^\dagger \mathcal{S}f_0](v_x, v_y, \rho)) \tag{III.24}$$

où

$$\mathcal{F}_3[R_0^\dagger \mathcal{S}f_0](v_x, v_y, \rho) = 2\pi \cdot H_{1/2}^r(\mathcal{F}_2[\mathcal{S}f](v_x, v_y, r)) \cdot e^{-2i\pi\rho u_z} \tag{III.25}$$

et  $H_{1/2}^r$  est la fonction de Hankel d'ordre 1/2,  $f$  se retrouvant par transformée de Fourier tridimensionnelle inverse à partir de (III.24).

Nous pouvons noter que l'équation (III.24) n'est pas à proprement parler une rétroprojection filtrée classique. En effet la rétroprojection filtrée est l'action d'utiliser l'opérateur de rétroprojection appliqué sur des données préalablement filtrées, ce n'est pas le cas ici.

Nous pouvons maintenant ajouter à la formule d'inversion (III.24) les différentes convolutions appliquées à  $\mathcal{S}f_0$  dû à la limitation de la bande passante et de l'ouverture synthétique comme pour le modèle originale de Redding,  $\mathcal{F}_2[\mathcal{S}f_0](v_x, v_y, r)$  sera remplacée par :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_2[\mathcal{S}f_{fb,fa}](v_x, v_y, r) &= \mathcal{F}_2[\mathcal{S}f_0](v_x, v_y, r) \\
&\star L_x \text{sinc}(L_x v_x) \\
&\star L_y \text{sinc}(L_y v_y) \\
&\star v_b e^{-2i\pi\nu_0 r} \text{sinc}(\nu_b r),
\end{aligned} \tag{III.26}$$

avec  $L_x$  et  $L_y$  les dimensions de l'ouverture synthétique,  $\nu_0$  la fréquence moyenne de la bande et  $\nu_b$  la valeur de la bande passante.

### III.2.3 Illustration avec un cas particulier : transformée de Radon sphérique bidimensionnelle

Pour illustrer notre algorithme, avant d'essayer de reconstruire des images 3D, nous regardons son application bidimensionnelle. Dans le cadre d'un sol plat, il est équivalent de considérer l'intégrale sur la sphère comme l'intégrale sur un cercle qui est l'intersection d'un plan avec la sphère[64]. Dans ce cadre, nous pouvons simplifier nos équations en passant d'une transformation de Radon sphérique à une transformation de Radon circulaire plus simple à utiliser :

$$g(u_x, r) = \iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) \delta(r - \sqrt{(x - u_x)^2 + y^2}) dx dy \quad (\text{III.27})$$

Nous illustrons ce procédé ici en reconstruisant une image de photo satellite comme image originale (voir Fig. III.4(a)) où le sol est considéré comme plat.

Ce sol est discrétisé sur une grille de taille  $N \times N$  (ici  $N = 128$ ). Les données brutes sont données dans la figure III.4(b) que nous obtenons en appliquant l'équation (III.27).

Nous reconstruisons l'image 2D par une méthode de rétroprojection :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_2[f](v_x, \rho) &= \frac{\pi}{2} |\rho| \mathcal{F}_2[f^\dagger](v_x, \rho) \\ f^\dagger(x, y) &= \int_{\mathbb{R}} g(u_x, \sqrt{(x - u_x)^2 + y^2}) du_x. \end{aligned} \quad (\text{III.28})$$

Nous numérisons cette transformée pour obtenir un algorithme de reconstruction. La cible est clairement reconstruite comme le montre l'image III.4(c). Malgré quelques artefacts, nous pouvons voir que cette méthode donne de très bons résultats pour la reconstruction d'un sol plat.

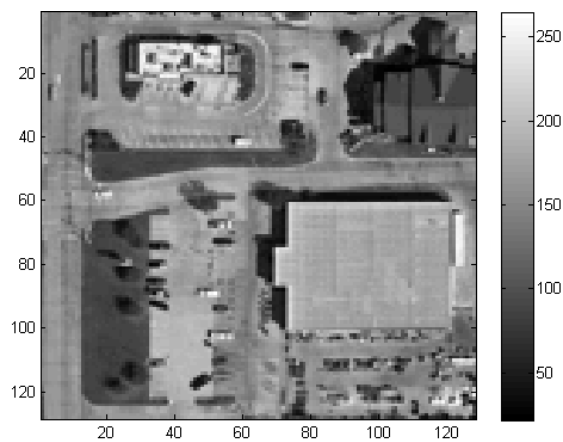
### III.2.4 Implémentation et résultats

Dans un premier temps, nous allons évaluer la résolution de reconstruction d'image dans le cadre de la formule d'inversion exacte en l'appliquant sur des objets ponctuels. Sur une grille de taille  $N \times N \times N$  (avec  $N = 32$ ), nous considérons trois cibles ponctuelles (voir Fig. III.5(a)). Dans le cadre de cette simulation, nous considérons les paramètres de discrétisation suivants :

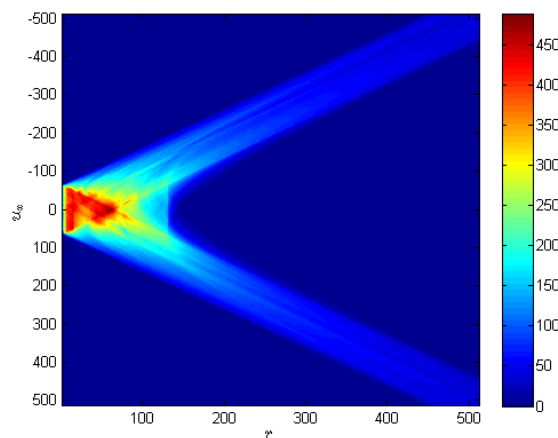
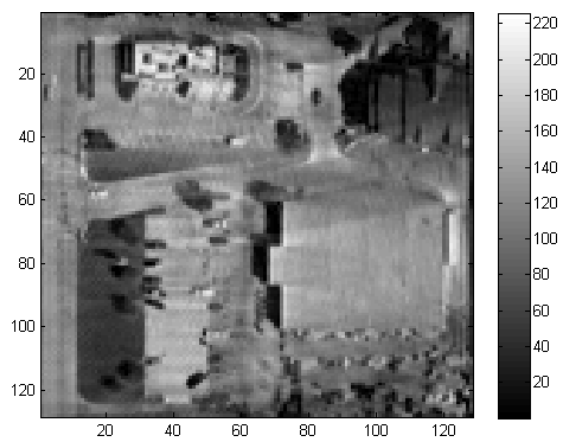
- $u_x = -2 * N : 1 : 2 * N$
- $u_z = N + 1$
- $\theta = 0 : 1/(10 * N) : 2\pi$
- $r = 0 : 0.1 : 3 * N$
- $u_y = -2 * N : 1 : 2 * N$ .

La Fig.III.5(b) illustre les données obtenues à partir de la Fig. III.5(a)) pour  $u_y = 0$ . Bien entendu, le jeu de données complet (en 3D) se caractérise par un cumul de trois paraboloïdes comme vu pour le PSF.

Nous pouvons néanmoins remarquer la discontinuité ici de ces paraboles ce qui sous-entend un manque d'échantillonnage dans l'acquisition des mesures. Malgré ce phénomène qui va détériorer notre image de reconstruction, cette dernière avec un seuillage (pour filtrer les artefacts) nous donne une reconstruction satisfaisante de ces points comme le montre la figure III.6. On remarque néanmoins l'apparition d'autres points malgré le seuillage.



(a) Image originale du sol

(b) Jeu de données. Sur l'axe des abscisses, nous retrouvons le paramètre  $u_x$  et nous avons le paramètre  $r$  sur l'axe des ordonnées.

(c) Reconstruction du sol original

FIGURE III.4

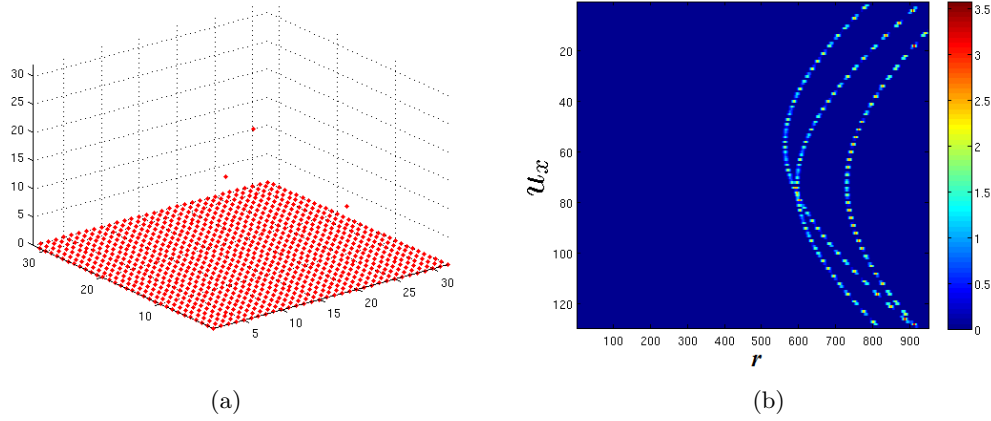


FIGURE III.5 – (a)Image de trois points dans l'espace. (b)Jeu de données pour  $u_y$  fixé. Sur les axes des abscisses, nous retrouvons le paramètre  $r$  et nous avons le paramètre  $u_x$  sur les axes des ordonnées

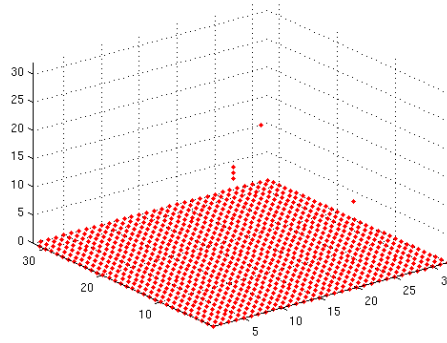


FIGURE III.6 – Reconstruction des cibles ponctuelles

Les cibles ponctuelles sont bien localisées, nous pouvons donc s'atteler à reconstruire des objets moins triviaux. Les valeurs de discrétisation pour toutes les simulations qui vont suivre sont les suivantes :

- $u_x = -2 * N : 1 : 2 * N$
- $u_z = N + 1$
- $\theta = 0 : 1/(20 * N) : 2\pi$
- $r = 0 : 0.5 : 3 * N$
- $u_y = -2 * N : 1 : 2 * N$ .

On se propose d'étudier maintenant un objet simulé par des mixtures de gaussiennes simulant un relief fictif Fig.III.7 sur une grille  $N \times N \times N$  où  $N = 64$ .

Pour observer les simulations en 3D, nous utilisons deux représentations : une représentation topographique des courbes de niveaux en vue de dessus(Fig. III.8(a)) et une représentation par coupe en faisant varier l'altitude  $z$  Fig. III.9. L'avantage de visualiser les reconstructions par coupe est d'être plus visuel et de ne pas être dépendant d'un seuillage. En effet sur une image topologique, nous appliquons un léger seuillage pour en-

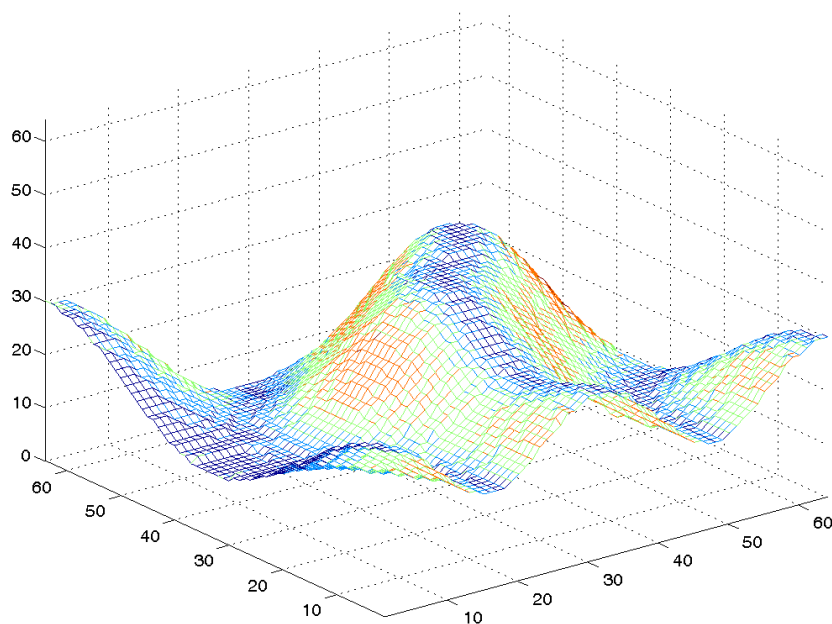


FIGURE III.7 – Image originale 3D de mixtures de gaussiennes sur une grille 64x64x64.

lever les valeurs très faibles pour qu'elles ne soient pas considérées comme un contour.

La Fig. III.8(b) illustre le jeu de données correspondant pour  $u_y = 0$ .

On se propose d'étudier maintenant un objet simulé par des mixtures de gaussiennes simulant un relief fictif Fig.III.7 sur une grille  $N \times N \times N$  où  $N = 64$ . Pour observer les simulations en 3D, nous utilisons les deux représentations vues précédemment (Fig. III.8(a) et Fig. III.9). Chaque type de représentation nous fournit un point de vue global (topographique) ou local (par coupe) sur la qualité de reconstruction. Dans le cadre des images topographiques, un seuillage de 25% (par rapport au niveau max de l'image) sera néanmoins appliqué.

Pour améliorer les résultats et réduire les artefacts extérieurs à l'objet, nous utilisons un masque sur la reconstruction (qui supprime toutes reconstructions de points en dehors de ce dernier). Ce masque est directement déduit des données et est l'application du théorème du support d'Helgason que Quinto a élargi dans le cadre des transformées de Radon sphériques [62]. De fait, ce masque ne reconstitue qu'une représentation convexe de notre image. L'objet du problème d'inversion réside donc dans la reconstruction de la partie non convexe.

La figure III.8(c) représente la visualisation topologique de notre mélange de gaussienne, les effets de bord sont dus au seuillage dans ce cas là, tandis que la figure III.9 représente quelques résultats vus en coupe. Nous pouvons voir que la structure des contours

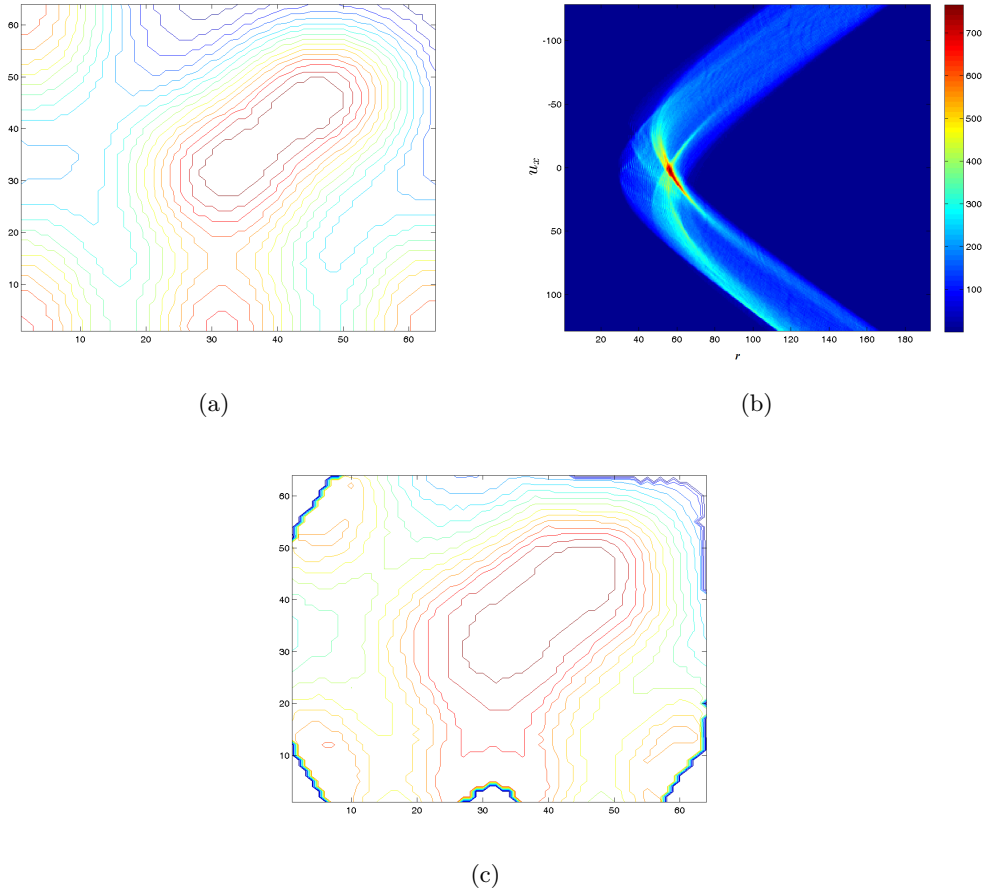


FIGURE III.8 – (a) Représentation en courbe de niveau de III.7. (b) Données obtenues par transformée de Radon sphérique pour  $u_y = 0$ . (c) Reconstruction par inversion exacte.

est bien reconstruite à ceci près que l'on peut constater l'effet d'un filtre passe-bas sur la reconstruction. Ce phénomène est dû à l'effet de fenêtrage sur les données.

On se propose maintenant d'étudier la robustesse de cet algorithme sous la présence de bruit speckle pour des variances allant de 0.1 à 1, le RSB pouvant s'écrire comme le rapport du maximum d'intensité de l'image sur la variance [73] :  $RSB = \frac{\max(I)}{\sigma}$ . Pour se faire nous étudions un objet simulé par des mixtures de gaussiennes Fig. III.10(a) sur une grille  $32 \times 32 \times 32$ . Nous remarquons que malgré un fort bruit notre reconstruction Fig. III.11 et Fig. III.12 est relativement robuste à ce phénomène. Cependant cette robustesse peut s'expliquer. En effet, nous avons stabilisé la formule en apodisant la FFT des données par une gaussienne dans chaque direction. A noter que sans cette apodisation, la reconstruction est d'autant plus "flou" du fait de à son instabilité d'implémentation.

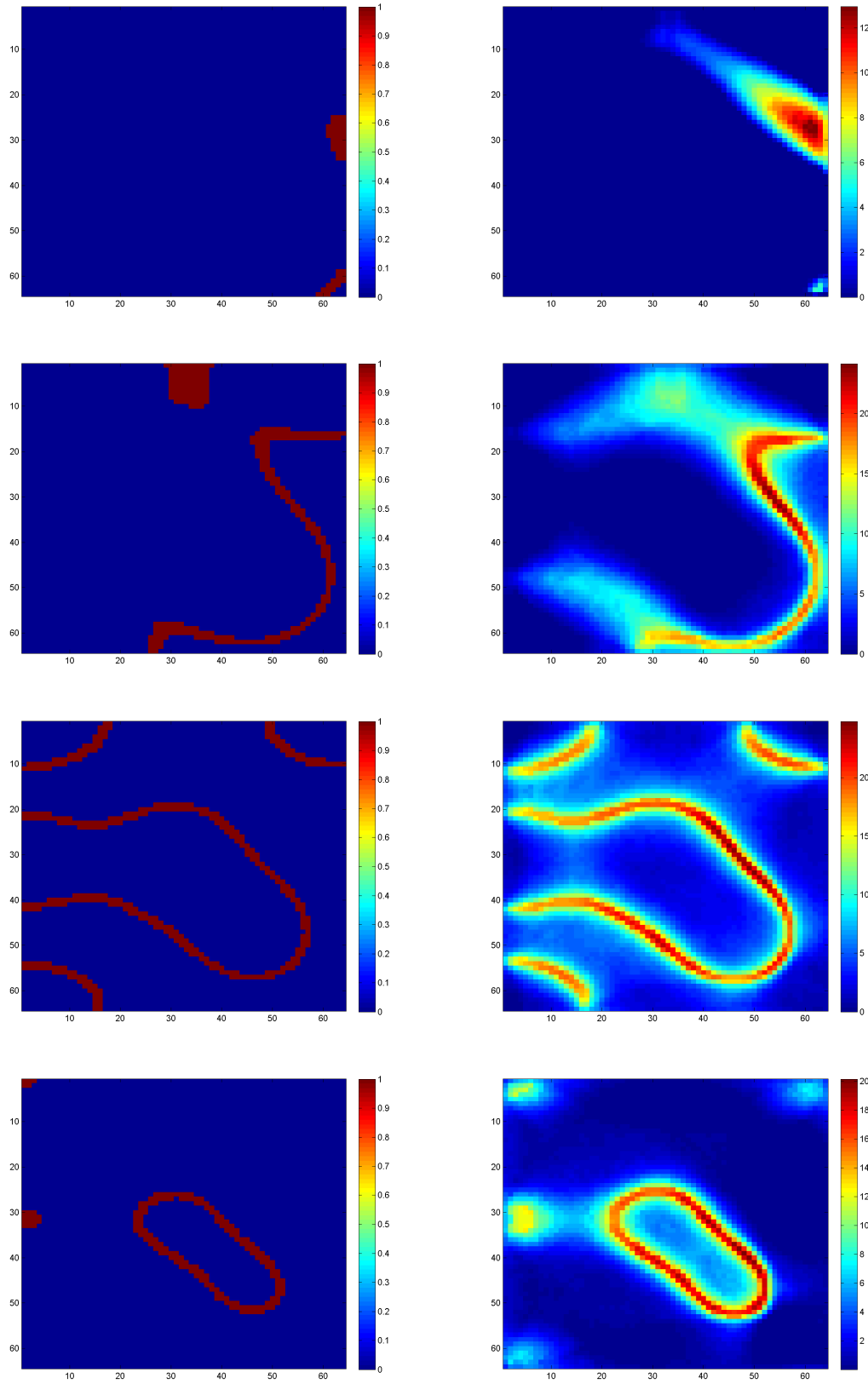
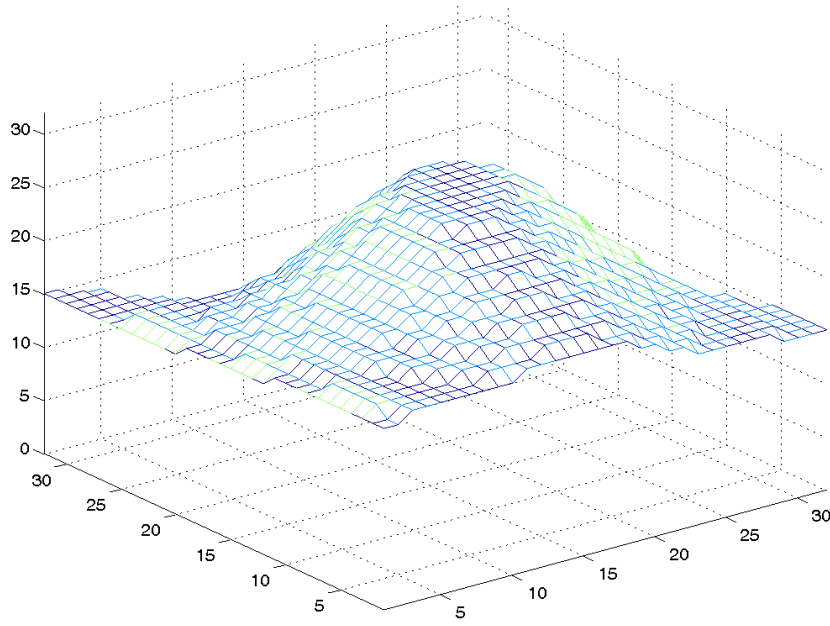
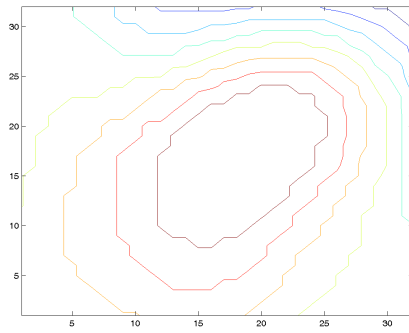


FIGURE III.9 – Colonne 1 : coupes altimétriques de l'image originale Fig. III.7 avec une évolution de bas en haut. Colonne 2 : reconstructions par inversion exacte.

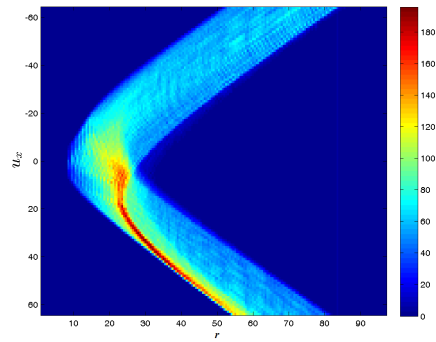




(a)



(b)



(c)

FIGURE III.10 – (a) Image originale 3D de mixtures de gaussiennes sur une grille  $32 \times 32 \times 32$  et sa représentation en courbe de niveau (b). (c) Données obtenues par transformée de Radon sphérique pour  $u_y = 0$ .

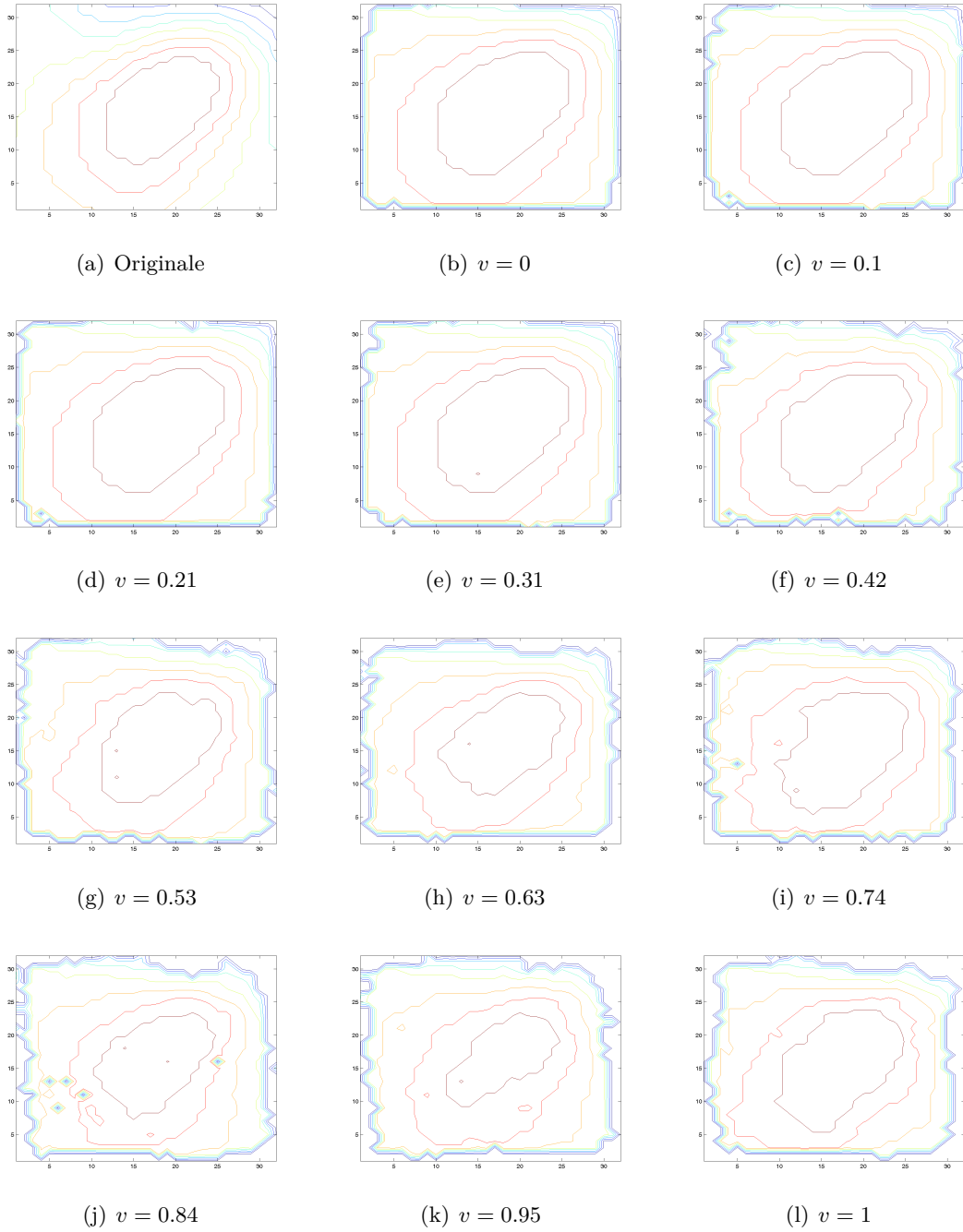


FIGURE III.11 – Reconstructions par courbes de niveau non seuillées pour des mixtures de gaussiennes (a) sur une grille  $32 \times 32 \times 32$  en utilisant l'inversion exacte pour différents niveaux de variance de bruit speckle (b)-(l).

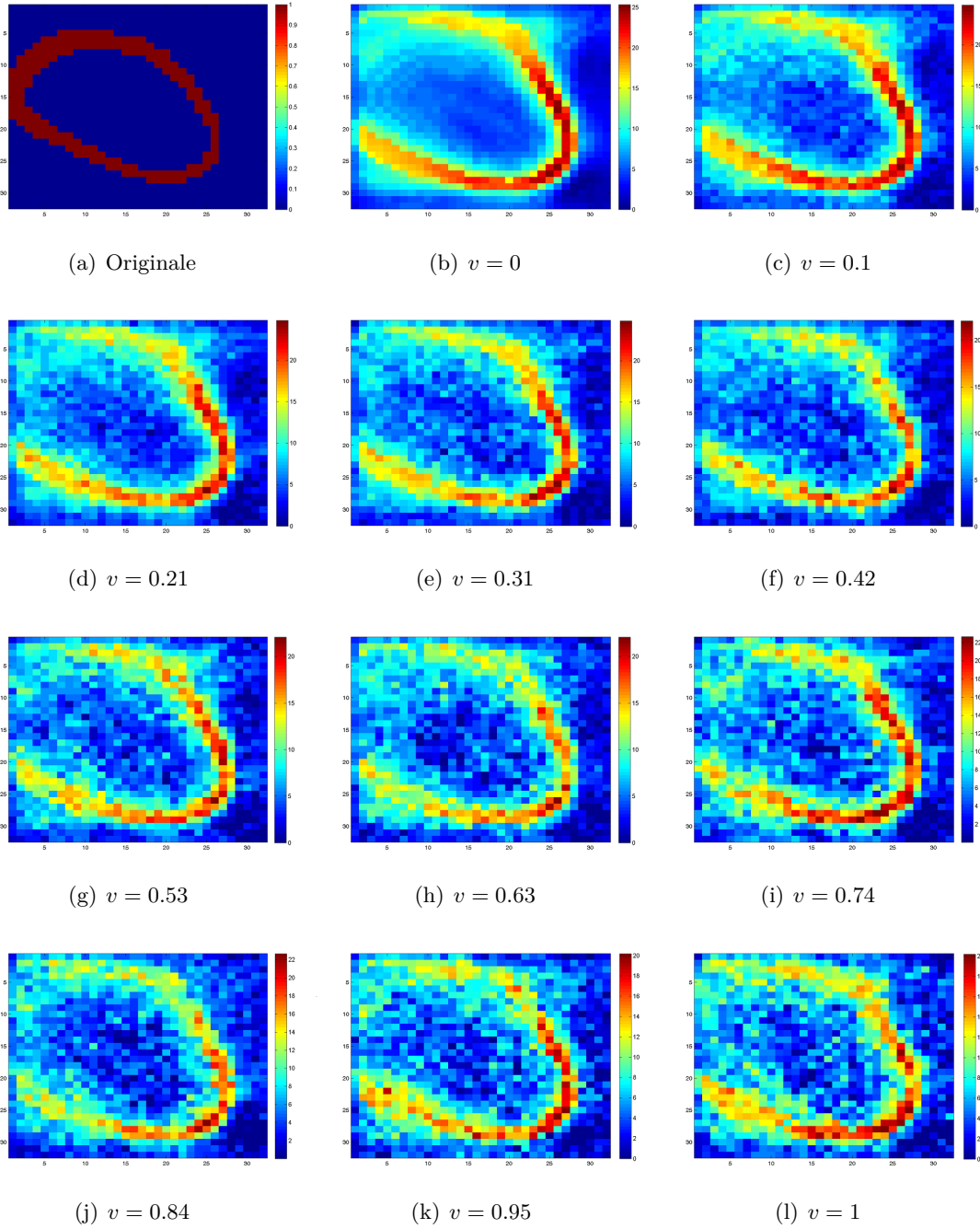


FIGURE III.12 – Reconstructions par courbes de niveau non seuillées pour une coupe des mixtures de gaussiennes (a) sur une grille 32x32x32 en utilisant l'inversion exacte pour différents niveaux de variance de bruit speckle (b)-(l).

### III.3 Algorithme de reconstruction par inversion approchée

Dans les sections précédentes, nous avons établi dans notre cas, une inversion exacte pour la transformée de Radon sphérique, inspirée par la méthode de Redding, impliquée dans le modèle de formation d'image du SAR. Son étude a fait émerger des difficultés d'implémentations à travers les phénomènes de fenêtrage et la présence d'un filtre rampe situé après la transformation de Hankel sur les données. Ces divers obstacles motivent la régularisation d'une telle inversion. C'est pourquoi, dans cette section, nous nous proposons d'établir l'inversion approchée correspondante en utilisant la théorie des mollifieurs [38]. Voir I.1.3 pour plus de détails.

#### III.3.1 Calcul du noyau de reconstruction

L'établissement d'une inversion approchée adaptée à la transformée de Radon sphérique étudiée ici revient à résoudre l'équation suivante :

$$\mathcal{S}^* \Psi_\gamma^X = \delta_\gamma^X. \quad (\text{III.29})$$

où

- $\mathcal{S}^*$  est l'opérateur adjoint à  $\mathcal{S}$  défini par

$$\mathcal{S}^* f(x, y, z) = \iint_{\mathbb{R}^2} \mathcal{S} f(u_x, u_y, \sqrt{(x - u_x)^2 + (y - u_y)^2 + (z - u_z)^2}) du_x du_y \quad (\text{III.30})$$

- $\delta_\gamma$  est la fonction mollifieur avec  $\gamma \in \mathbb{R}^+$  telle que

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \langle f(X), \delta_\gamma^X \rangle = \langle f(X), \delta(X) \rangle \quad (\text{III.31})$$

- et  $\Psi_\gamma^X$  est appelé le noyau de reconstruction approché au point de reconstruction  $X$ .

Dans le but de régulariser la topologie de l'image reconstruite, nous considérons dorénavant la fonction  $f_\gamma = \langle f, \delta_\gamma^X \rangle$  comme résultat de notre processus d'inversion. En substituant l'équation (III.29) dans la définition de  $f_\gamma$ , la solution de notre problème de reconstruction prend la forme du produit de nos données  $\mathcal{S}f$  avec le noyau de reconstruction approchée

$$f_\gamma = \langle f, \delta_\gamma^X \rangle = \langle \mathcal{S}f, \Psi_\gamma^X \rangle. \quad (\text{III.32})$$

Sans propriété sur  $\mathcal{S}$  et son inverse, le calcul du noyau de reconstruction approché nécessite d'être évalué en tout point  $X$  de l'espace, ce qui devient laborieux et difficile à implémenter. Fort heureusement,  $\Psi_\gamma^X$  peut être déduit à partir de la formule d'inversion exacte de  $\mathcal{S}$ . En effet, l'équation (III.24) peut être réécrite comme :

$$\mathcal{F}_3[f](v_x, v_y, \rho) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} |\rho| e^{-2i\pi\rho u_z} \sqrt{v_x^2 + \rho^2 + v_y^2} \mathcal{F}_3[\mathcal{S}^* f_0](v_x, v_y, \rho). \quad (\text{III.33})$$

La présence de l'opérateur adjoint  $\mathcal{S}^*$  dans cette formule facilite le calcul du noyau de reconstruction. Nous avons alors

$$\begin{aligned}
f_\gamma &= \langle f, \delta_\gamma^X \rangle \\
&= \left\langle \mathcal{F}_3^{-1} \left[ w \cdot \mathcal{F}_3 \left[ \mathcal{S}^* \left( \frac{\mathcal{S}f(u_x, u_y, r)}{r} \right) \right] \right], \delta_\gamma^X \right\rangle \\
&= \left\langle \mathcal{F}_3 \left[ \mathcal{S}^* \left( \frac{\mathcal{S}f(u_x, u_y, r)}{r} \right) \right], w \cdot \mathcal{F}_3 [\delta_\gamma^X] \right\rangle \\
&= \left\langle \mathcal{S}^* \left( \frac{\mathcal{S}f(u_x, u_y, r)}{r} \right), \mathcal{F}_3^{-1} [w \cdot \mathcal{F}_3 [\delta_\gamma^X]] \right\rangle \\
&= \langle \mathcal{S}f, r^{-1} \cdot \mathcal{S} (\mathcal{F}_3^{-1} [w \cdot \mathcal{F}_3 [\delta_\gamma^X]]) \rangle
\end{aligned} \tag{III.34}$$

avec  $w = \sqrt{\frac{\pi}{2}} |\rho| \sqrt{\nu_x^2 + \rho^2 + \nu_y^2} e^{-2i\pi\rho u_z}$ .

L'équation précédente nous fournit ainsi la solution de l'équation  $\mathcal{S}^* \Psi_\gamma^X = \delta_\gamma^X$  qui s'écrit :

$$\Psi_\gamma^X = r^{-1} \cdot \mathcal{S} (\mathcal{F}_3^{-1} [w \mathcal{F}_3 [\delta_\gamma^X]]) . \tag{III.35}$$

Il apparaît que ce noyau possède la même propriété d'invariance par translation que la transformée de Radon sphérique  $\mathcal{S}$ , *i.e.* :

$$\Psi_\gamma^X(u_x, u_y, r) = \Psi_\gamma^y(u_x - x, u_y - y, r) . \tag{III.36}$$

Cette propriété nous permet ainsi de calculer le noyau en tout point de l'espace  $X$  à partir de ce même noyau évalué en un point donné et de limiter le stockage de son pré-calcul.

### III.3.2 Choix du mollifieur

Quel que soit le choix du mollifieur, le paramètre  $\gamma$  jouera le rôle de paramètre de régularisation (et sera choisi de manière assez empirique), le choix du mollifieur apparaissant plus comme un *a priori* sur nos données de reconstruction et donc sur notre reconstruction finale. Comme le calcul du noyau nécessite le calcul de la transformée de Fourier du mollifieur, il est plus simple de considérer des fonctions aux transformées de Fourier connues mais devant toutefois vérifier l'équation (III.31).

Un choix classique pour la fonction de mollification sera la gaussienne :

$$\delta_\gamma(X - Y) = (2\pi)^{(-3/2)} \gamma^{-3} e^{-\frac{|X-Y|^2}{2\gamma^2}} \tag{III.37}$$

et dont la transformée de Fourier s'exprime comme :

$$\mathcal{F}_3 [\delta_\gamma(X - Y)] (\nu) = \frac{1}{2\pi\gamma^2} e^{-iX \cdot \nu} e^{-\frac{\gamma^2 |\nu|^2}{2}} \tag{III.38}$$

Un autre choix est d'utiliser ici la fonction caractéristique sur une sphère avec une paramétrisation adaptée comme ce qui suit :

$$\delta_\gamma(X - Y) = \frac{\chi_{[0,1]}(|X - Y|/\gamma)}{\sqrt{1 - |X - Y|^2/\gamma^2}} \tag{III.39}$$

où la fonction  $\chi_{[0,1]}$  est la fonction indicatrice de l'intervalle  $[0, 1]$ . Ce choix permettra de simplifier le calcul du noyau et de considérer des moyennes locales de la solution calculée

(ce qui très bien adapté au transformée de Radon de dimension impair). La transformée de Fourier de ce dernier mollifieur étant :

$$\mathcal{F}_3 [\delta_\gamma(X - Y)](\nu) = -4\pi e^{-iX \cdot \nu} \frac{J_1(\gamma|\nu|)}{|\nu|} \quad (\text{III.40})$$

où  $J_1$  est la fonction de Bessel du premier ordre.

On peut aussi choisir le mollifieur correspondant à un filtre à bande limitée

$$\delta_\gamma(X - Y) = \left(\frac{\gamma}{\pi}\right)^3 \text{sinc}(\gamma(X - Y)) \quad (\text{III.41})$$

qui permettra de filtrer les composantes en hautes fréquences apportant une certaine robustesse au bruit. La transformée de Fourier est dans ce cas :

$$\mathcal{F}_3 [\delta_\gamma(X - Y)](\nu) = \frac{\gamma^2}{\pi^3} e^{-iX \cdot \nu} \Pi_{[-\gamma^{-1}, \gamma^{-1}]}(\nu). \quad (\text{III.42})$$

Calculons maintenant notre inversion par mollification en prenant par exemple le mollifieur (III.41).

Le mollifieur filtré est :

$$\tilde{\delta}_\gamma(x, y, z) = \frac{\gamma^2}{\pi^3} \mathcal{F}_3^{-1} [\omega \Pi_{[-1, 1]}(\gamma\nu)](x, y, z), \quad (\text{III.43})$$

et nous avons finalement :

$$f_\gamma(x, y, z) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{g(u_x, u_y, r)}{r} \cdot \mathcal{S}(\tilde{\delta}_\gamma(x', y' - y, z'))(u_x - x, u_y - y, r) du_x du_y dr \quad (\text{III.44})$$

En suivant le même procédé nous pouvons écrire, à partir de la transformée de Fourier du mollifieur, la fonction de reconstruction approximée pour tous les choix de mollifieur.

Cette méthode de reconstruction apporte plusieurs avantages d'un point de vue numérique :

- Le noyau de reconstruction peut être pré-calculé indépendamment des données puis évalué en tout point en utilisant la propriété d'invariance de l'équation (III.36), d'où un gain de temps non négligeable en pratique.
- L'hyperparamètre  $\gamma$  permet d'ajuster notre régularisation et cette dernière augmente la stabilité de notre l'algorithme.
- Le choix du mollifieur peut être plus pertinent en terme d'implémentation par l'ajout d'un *a priori* dans l'algorithme de reconstruction.
- Nous n'effectuons aucun passage dans le domaine de Fourier de nos données, ce passage en Fourier s'effectue sur le mollifieur à la place (fonction simple que l'on maîtrise), permettant d'éviter les nombreux problèmes numériques qui en découlent habituellement.
- De la même manière le transfert de l'application de la transformée de Fourier sur le mollifieur en lieu et place des données permet de diminuer l'effet du fenêtrage sur les données discrètes lors du calcul numérique.

### III.3.3 Implémentation et résultats

On se propose d'étudier maintenant un objet composé de gaussiennes simulant un relief Fig. III.7 sur une grille  $64 \times 64 \times 64$ . Nous utilisons les mêmes paramètres de discrétisation que pour la partie précédente et un mollifieur gaussien.

La reconstruction de notre image est réalisée avec plusieurs valeurs  $\gamma$  (variant de 0 à 5 voir Fig. III.13). L'EQMR pour la valeur  $\gamma$  optimale (voir Fig. III.14) est de 4.77% alors qu'elle est de 8.4% dans le cas de la reconstruction par la formule d'inversion exacte. Sur la représentation par courbes de niveau, nous observons néanmoins des artefacts dus au seuil.

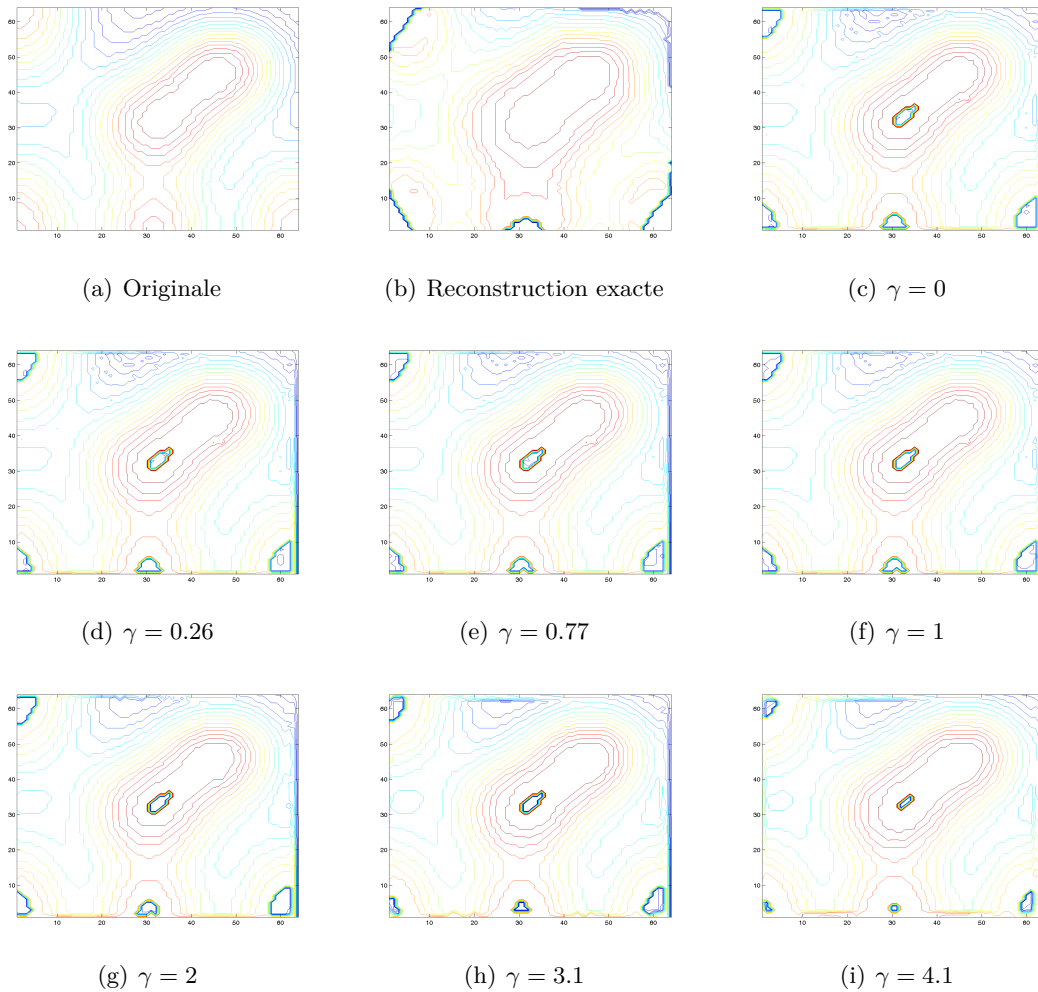


FIGURE III.13 – Reconstructions par courbes de niveau non seuillées pour des mixtures de gaussiennes (a) sur une grille  $64 \times 64 \times 64$  en utilisant la formule d'inversion exacte (b) puis l'inversion approchée pour différents paramètres de régularisation  $\gamma$  (c)-(i).

Si nous décidons d'observer l'erreur quadratique en fonction du paramètre  $\gamma$ , nous constatons un minimum global autour de 3.1 pour cette image (voir Fig. III.14), avant d'avoir une augmentation de l'erreur très importante. En effet, si  $\gamma$  est trop grand, les

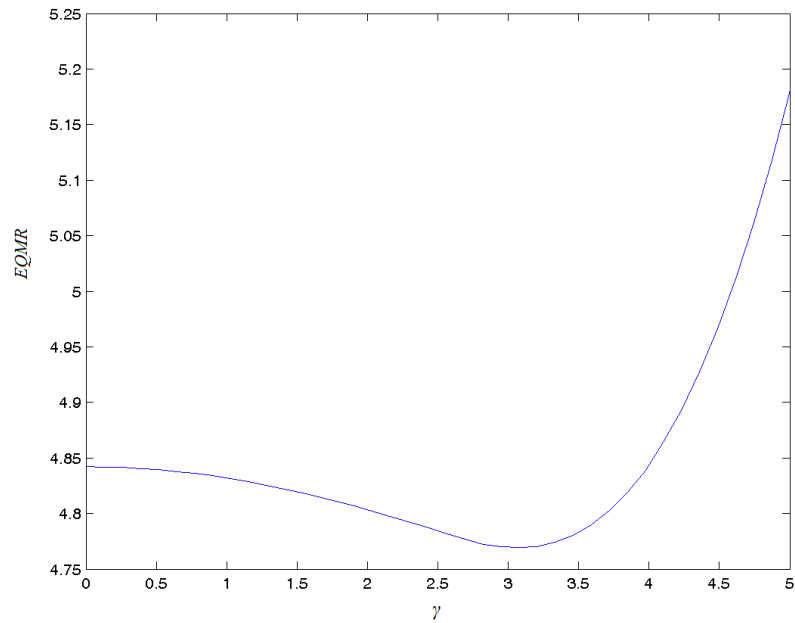


FIGURE III.14 – Évolution de l'erreur quadratique en fonction des valeurs de  $\gamma$  pour la reconstruction par inversion approchée avec un mollifieur gaussien sur une grille 64x64x64.

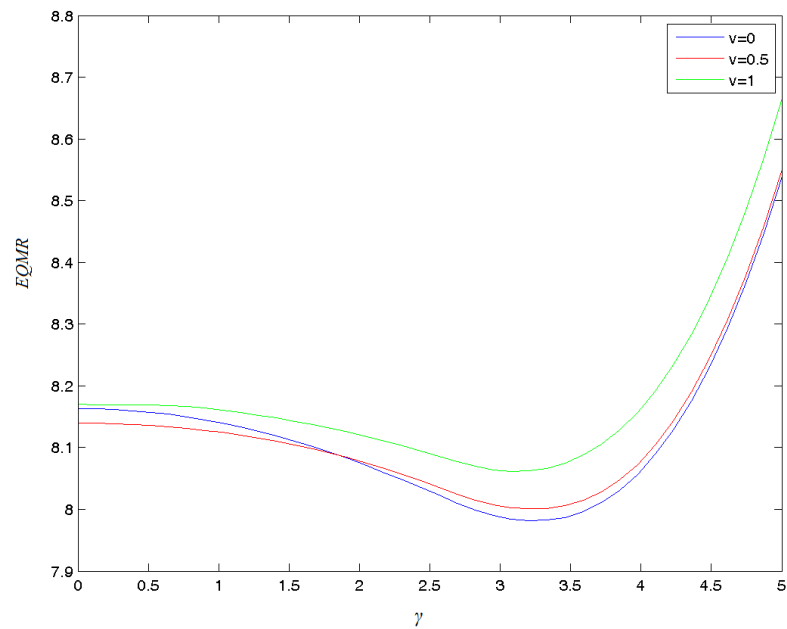


FIGURE III.15 – Évolution de l'erreur quadratique en fonction des valeurs de  $\gamma$  pour plusieurs niveaux de variances de bruit sur une grille 32x32x32.



données seront trop lissées pour pouvoir obtenir une bonne reconstruction de l'image.

Si nous regardons plus en détail la reconstruction avec  $\gamma$  fixé, nous pouvons réaliser une étude comparative Fig. III.16 et Fig. III.17 entre la reconstruction approchée et la reconstruction par discrétisation de l'inversion exacte. Nous remarquons dans ces figures la très bonne reconstruction par l'inversion approchée où les contours du motif tridimensionnel sont reconstruits avec une très bonne précision. L'effet de flou qu'on pouvait constater pour le modèle précédent est ici très peu présent.

On peut aussi étudier la robustesse de cet algorithme sous la présence de bruit speckle. Pour se faire nous étudions un objet simulé par des mixtures de gaussiennes Fig. III.10(a) sur une grille 32x32x32. Les résultats pour un signal bruité sont donnés pour les Fig. III.18 et III.19. Pour ce mollifieur, nous pouvons voir que la reconstruction semble robuste au faible bruit sans correction.

### III.4 Conclusion

L'approche par transformée de Radon sphérique est une alternative aux méthodes classiques de reconstruction d'images pour le radar. Elle permet la reconstruction de l'image directement en 3D et s'affranchit de certains des problèmes physiques inhérentes aux algorithmes basés sur les équations de Maxwell. Bien que l'approche exacte possède certaines instabilités à l'implémentation, nous avons vu qu'une méthode approchée par la méthode des mollifieurs permet une reconstruction fine des structures tridimensionnelles, ce qui représente une solution innovante en reconstruction 3D du modèle SAR.

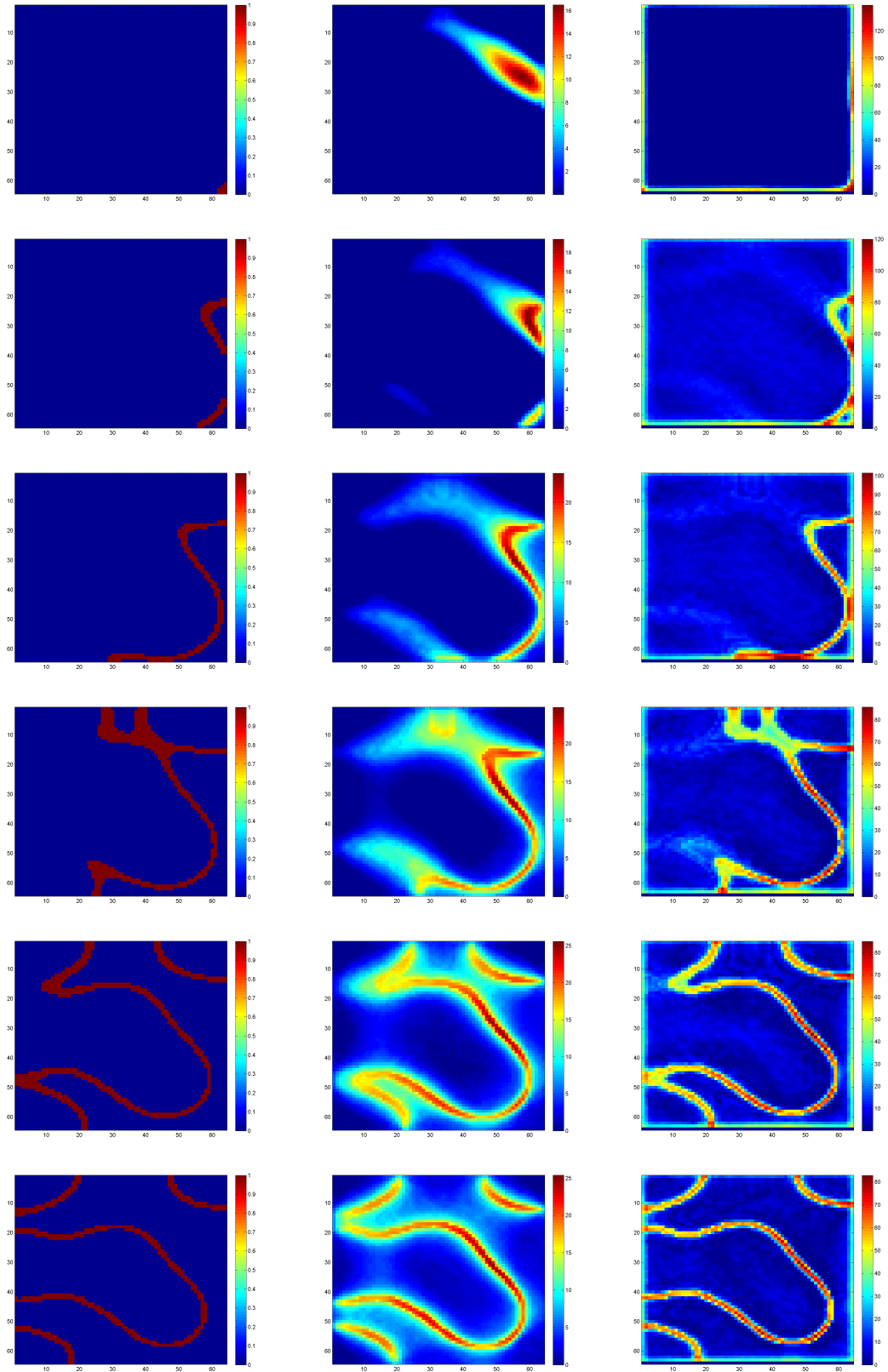


FIGURE III.16 – Colonne 1 : coupes altimétriques de l'image originale Fig. III.7 avec une évolution de bas en haut. Colonne 2 : reconstructions par inversion exacte. Colonne 3 : reconstructions par inversion approchée avec  $\gamma = 3$ .

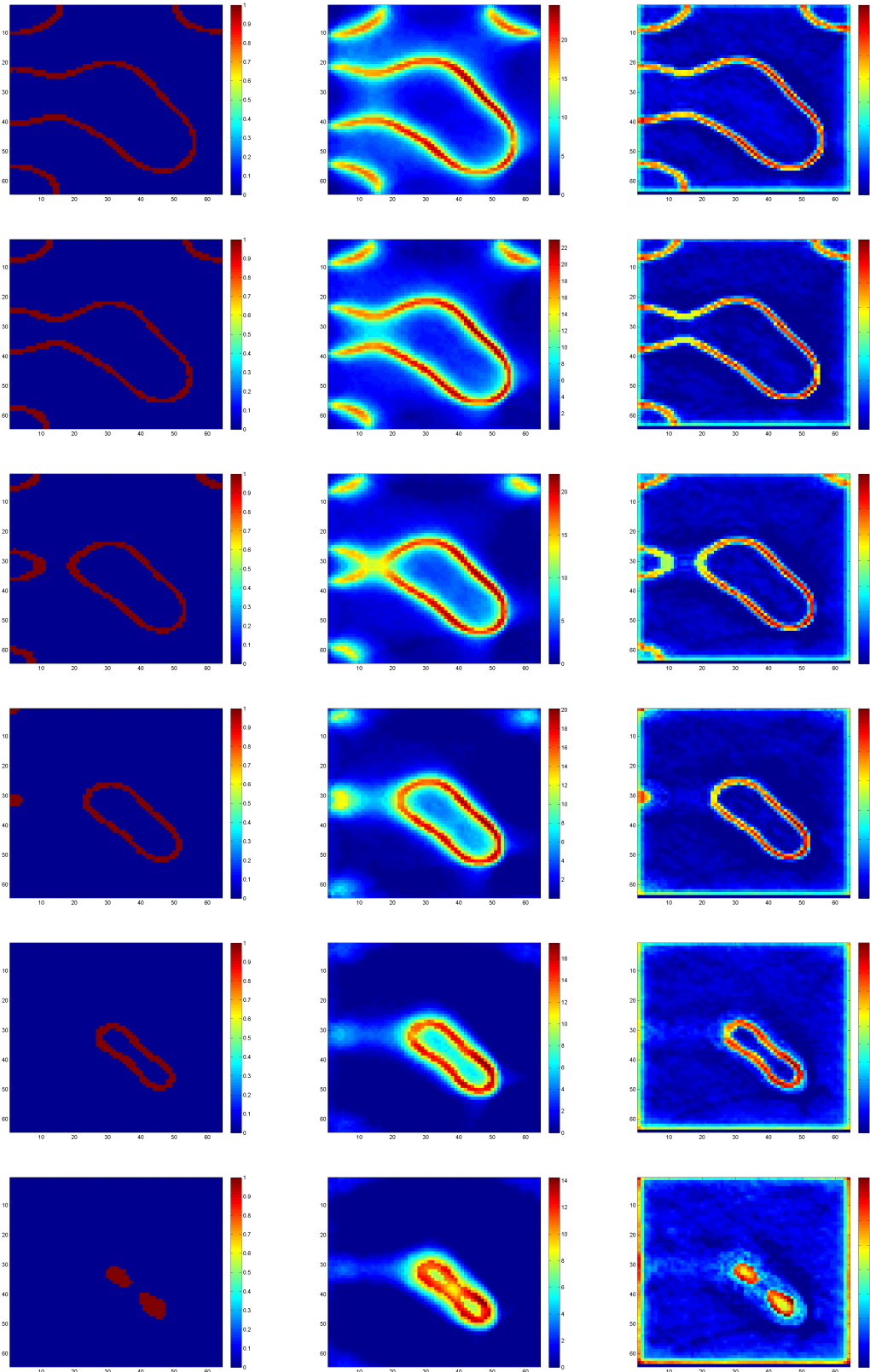


FIGURE III.17 – Colonne 1 : coupes altimétriques de l'image originale Fig. III.7 avec une évolution de bas en haut. Colonne 2 : reconstructions par inversion exacte. Colonne 3 : reconstructions par inversion approchée avec  $\gamma = 3$ .

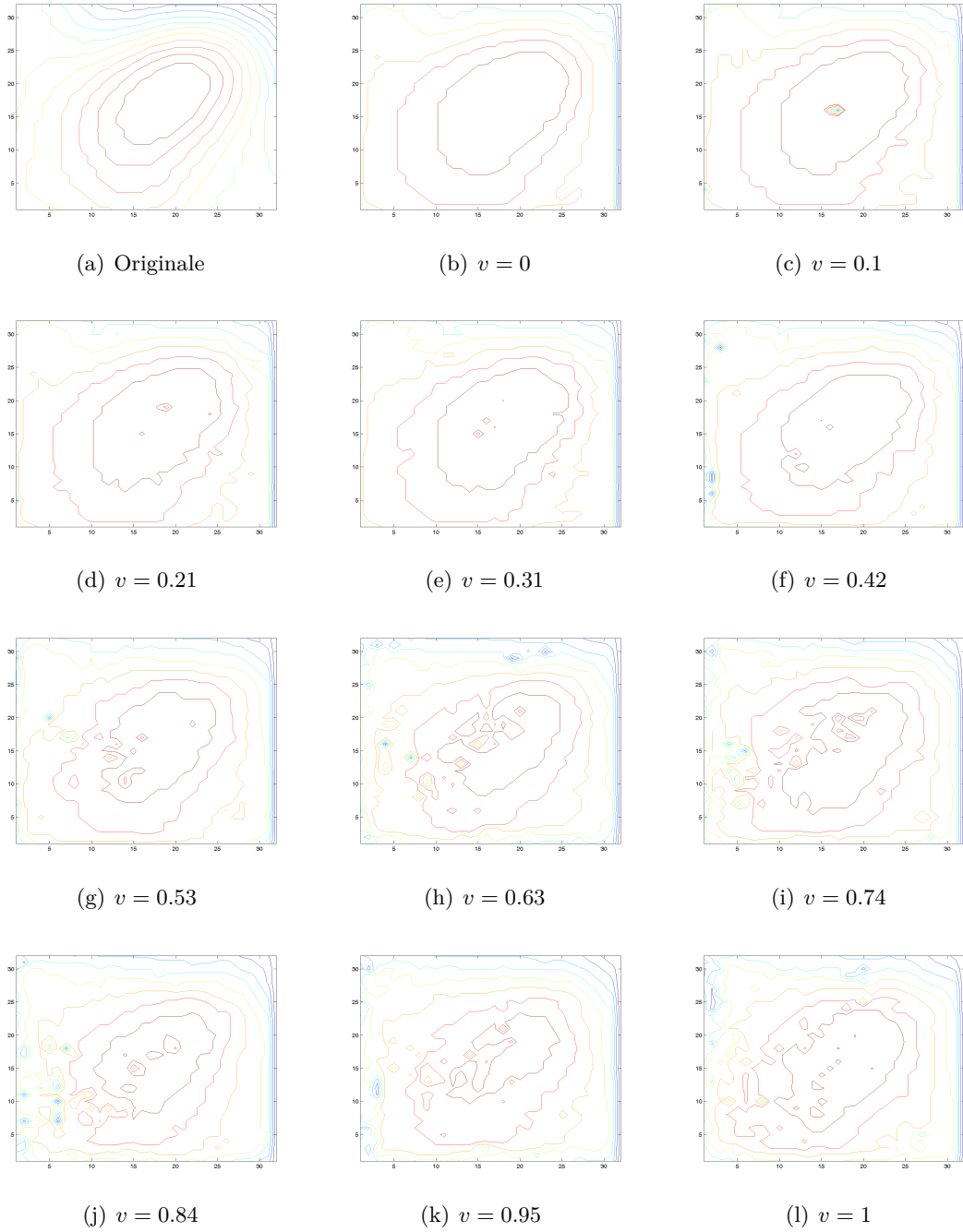


FIGURE III.18 – Reconstructions par courbes de niveau non seuillées pour des mixtures de gaussiennes (a) sur une grille 32x32x32 en utilisant l'inversion approchée pour différents niveaux de variance de bruit speckle avec un paramètre de régularisation  $\gamma = 3.3$  (b)-(l).

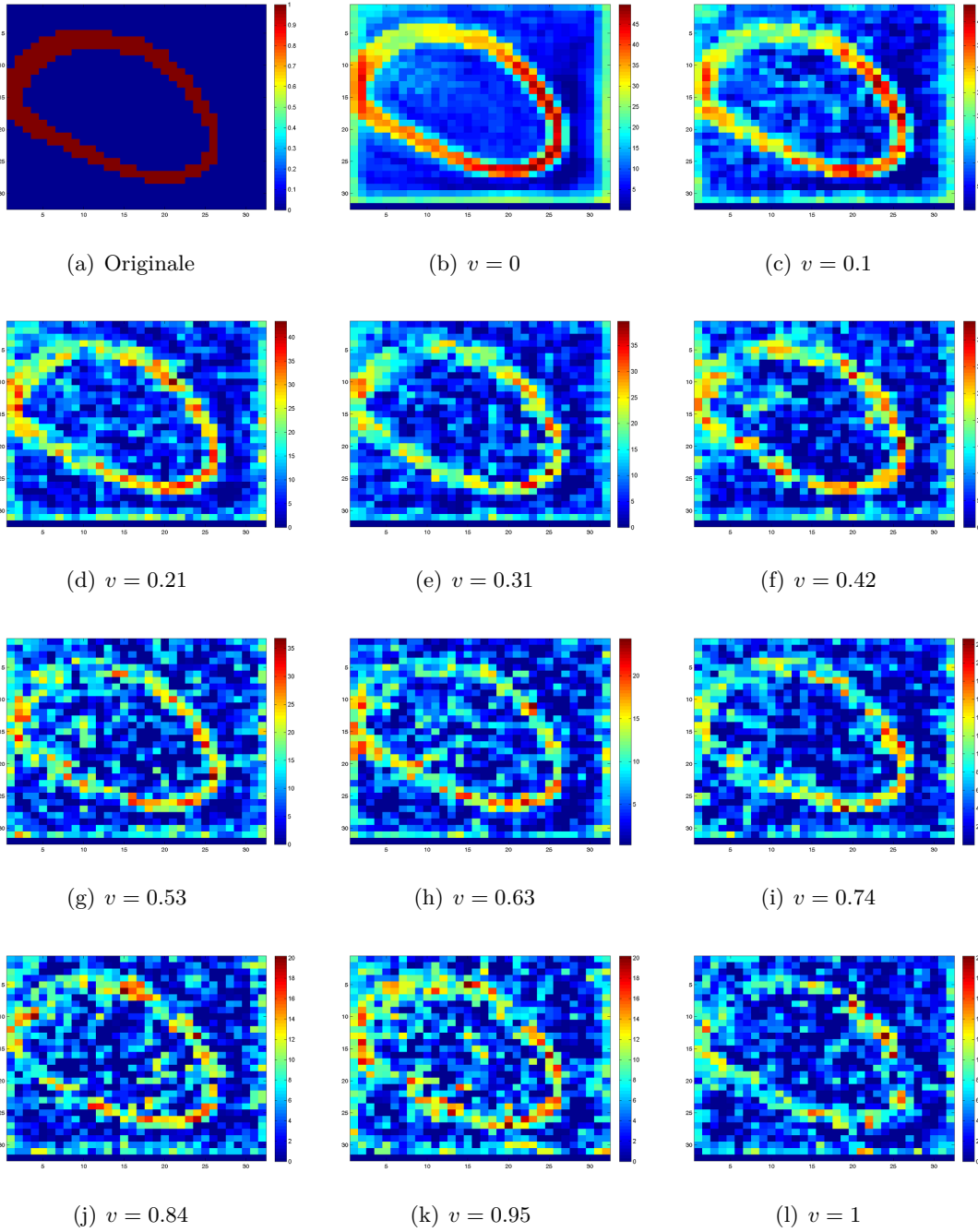


FIGURE III.19 – Reconstructions non seuillées pour une coupe des mixtures de gaussiennes (a) sur une grille  $32 \times 32 \times 32$  en utilisant l'inversion approchée pour différents niveaux de variance de bruit speckle avec un paramètre de régularisation  $\gamma = 3.3$  (b)-(l).

## Conclusion et perspectives

L'objectif de cette thèse était d'étudier une nouvelle approche de reconstruction d'images fondée sur certaines transformées de Radon généralisées. Nous avons étudié la transformée de Radon sur des lignes brisées dans le cadre de trois nouvelles modalités tomographiques ainsi que la transformée de Radon sphérique pour réaliser de nouveaux algorithmes de reconstruction d'images pour le radar à synthèse d'ouverture.

Nous avons apporté de nombreuses contributions :

- Nous avons mis en œuvre le calcul de l'inversion de trois transformées de Radon sur des lignes droites brisées pour la reconstruction d'images dans le cadre de trois nouvelles modalités de tomographie : la tomographie par transmission utilisant un miroir, la tomographie par émission utilisant la caméra gamma et la première bimodalité de tomographie Compton.
- Nous avons développé un nouveau concept d'imagerie bimodale à partir du rayonnement diffusé couplant une modalité par transmission et une par émission. Ce système apparaît comme une alternative au système PET/CT en gardant une bonne qualité de reconstruction sans mouvement du détecteur autour de l'objet. Nos résultats démontrent la faisabilité de cette nouvelle imagerie.
- Nous avons généralisé l'algorithme IPC (Iterative Pre-Correction) à une plus grande diversité de transformées et de déformations. En particulier, ce nouvel algorithme GIPC (Generalized Iterative Pre-Correction) est parfaitement adapté pour la correction de l'atténuation dans les modalités d'imagerie utilisant le rayonnement diffusé.
- Nous avons proposé pour l'imagerie radar à ouverture synthétique une modélisation par la transformée de Radon sphérique. Dans ce contexte, nous avons réussi à implémenter un algorithme capable de reconstruire une image directement en trois dimensions, ce qui représente une avancée significative. Nous avons ensuite développé un autre nouvel algorithme d'inversion de la transformée de Radon sphérique fondé sur la théorie des mollifieurs, beaucoup plus précis pour obtenir une reconstruction de grande qualité, que nous avons illustrée par de nombreuses simulations.

De ces résultats et contributions plusieurs perspectives de recherche peuvent être proposées :

- **Imagerie tri-dimensionnelle** : la performance des algorithmes de reconstruction d'images proposés dans le cadre de l'imagerie bimodale par rayonnement diffusé ouvre la voie à de nouvelles perspectives notamment pour son extension en 3D, ce qui conduira à la généralisation des transformées sur des cônes et sur des tores, le tore étant une nouvelle surface d'intégration pour les transformées de Radon.
- **Correction d'atténuation** : nous avons établi un nouvel algorithme de correction opérationnel, ce qui n'empêche pas que l'établissement de l'inversion analytique pour la TRVC atténuée pourrait être un puissant outil pour pouvoir effectuer à la fois la reconstruction d'images et la correction d'atténuation, à l'instar des travaux de Novikov [60] sur la transformation de Radon atténuée pour la modalité SPECT classique.
- **Technologie des détecteurs** : l'imagerie Compton nécessite des détecteurs à haute résolution énergétique pour augmenter la discrimination énergétique et ainsi obtenir une meilleure résolution. Le développement de ces détecteurs est un axe porteur de collaboration.
- **Application plus générale au radar à ouverture synthétique** : la prise en compte de la fonction du diagramme de l'antenne dans notre modèle permettrait de généraliser notre étude à des radars dont la forme d'onde émise s'éloigne trop fortement de notre modèle sphérique pour que ce dernier soit utilisé. Il faudra aussi réaliser des simulations plus exhaustives avec des données plus réalistes notamment en terme de dynamique.
- **Détection de mouvement de cibles** : l'un des principaux problèmes du SAR est la correction du mouvement des cibles mobiles. Copeland [18] a montré dans un cas simple que la théorie de Radon pouvait être utilisée pour compenser les mouvements d'une cible en imagerie SAR. Il serait donc intéressant de réussir à généraliser ces travaux dans un cadre plus général et à les incorporer dans nos algorithmes.
- **Application des transformées de Radon à d'autres domaines** : les méthodes développées dans cette thèse sont susceptibles d'applications dans d'autres imageries utilisant d'autres types de généralisation de la transformée de Radon. Nous pouvons notamment citer l'imagerie sismique modélisée par la transformée de Radon définie sur des paraboles, de nombreuses applications des transformées de Radon sur des cercles que cela soit pour des imageries utilisant des rayonnements ionisants que pour l'imagerie thermo-opto-acoustique ou encore l'application possible de la transformée de Radon hyperbolique en radar Doppler. Les domaines où la généralisation de la transformée de Radon peut être utile sont très vastes et constituent un axe de recherche très stimulant.

---

## Publications

---

### Articles de revues internationales

1. G. Rigaud, R. Régnier, M. K. Nguyen and H. Zaidi, "Combined modalities of Compton scattering tomography", IEEE-Transaction on nuclear science (TNS), Vol. 60, No. 3, pp. 1570-1577, 2013.

### Actes de conférences internationales

1. R. Régnier, G. Rigaud and M. K. Nguyen, "New approximated inversion of spherical Radon transform in SAR imaging", IEEE-International Conference on Image Processing (ICIP), Melbourne, Australia, 2013.
2. O. Olvera Guerrero, G. Rigaud, R. Régnier and M. K. Nguyen, "Attenuation correction in a new modality of Compton scattering tomography", Interdisciplinary Symposium on Signal and Systems for Medical Applications (ISSSMA), Paris, France, June 2013.
3. G. Rigaud, R. Régnier, and M. K. Nguyen, "New bimodal scattered radiation tomographic imaging with attenuation and electron density correction algorithm", IEEE-International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP), Vancouver, Canada, 2013.
4. R. Régnier and M. K. Nguyen, "A novel coupled transmission-reflection tomography and the V-line Radon transform", IEEE-International Conference on Image Processing (ICIP), Brussels, Belgium, 2011.
5. M. K. Nguyen and R. Régnier, "Inversion of the V-line Radon transform and its numerical analysis", International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics (ICNAAM), Rhodes, Greece, 2010.
6. R. Régnier, M. K. Nguyen, and T. T. Truong, "Compton scattering emission imaging based on the V-line Radon transform and its simulation", European Simulation and Modelling (EUROSIM), Prague, Czech Republic, 2010.
7. M. K. Nguyen, R. Régnier, T. T. Truong and H. Zaidi, "Compton scattered imaging based on the V-line Radon transform and its medical imaging applications", IEEEEngineering on Medicine and Biology Conference (EMBC), Buenos Aires, Argentina, 2010.

### Actes de conférences nationales

1. R. Régnier, M. K. Nguyen, " Une nouvelle méthode de reconstruction d'image fondée sur de la tomographie couplant les phénomènes de transmission et de réflexion", GRETSI, Bordeaux, septembre 2011.
2. R. Régnier, M. K. Nguyen, " Une nouvelle méthode de tomographie fondée sur le couplage transmission-réflexion ", COFREND, Dunkerque, mai 2011.





---

## Bibliographie

---

- [1] M. Agranovsky and E. T. Quinto, "Injectivity sets for the Radon transform over circles and complete systems of radial functions", *J. functional Analysis*, 139, pp. 383-414, 1996.
- [2] L.-E. Andersson, "On the determination of a function from spherical averages", *SIAM J. Math. Anal.* 19, pp. 214-232, 1988.
- [3] N. V. Arendtsz and E. M. A. Hussein, "Energy-spectral Compton scatter imaging - part 1 : theory and mathematics", *IEEE Transactions on Nuclear Sciences*, vol. 42, pp. 2155-2165, 1995.
- [4] G. Backus and F. Gilbert, "Numerical application of a formalism for geophysical inverse problems", *Geophys. J.R. Astron. soc.*, vol. 13, pp. 247-76, 1967.
- [5] H. H. Barrett, "The Radon transform and its applications", *Progress in Optics*, vol 21, ed. E Wolf, pp. 219-86, 1984.
- [6] R. Basko, G. L. Zeng and G. T. Gullberg, "Analytical reconstruction formula for the one-dimensional Compton camera", *IEEE Trans. Nucl. Sci.* 44, pp. 1342-46, 1997.
- [7] S. Bellini, M. Piacentini, C. Cafforio and F. Rocca, "Compensation of tissue absorption in emission tomography", *IEEE Trans. Acoustics, Speech and Signal Processing*, vol. 27, pp. 213-218, 1979.
- [8] M. Bertero, C. de Mol and C. Viano, "Inverse scattering in optics", ed. H. P. Baltes, pp 161-214, 1980.
- [9] T. Beyer, D. W. Townsend and al., "A combined pet/ct scanner for clinical oncology", *J. Nucl. Med.*, vol. 41, pp. 1369-1379, 2000.
- [10] J. Boutros and G. Barrie, "Ultra-wideband synthetic aperture radar imaging", *Technical Memorandum, DRDC Ottawa TM 2003-177*, November 2003.
- [11] R. N. Bracewell, "The Fourier transform and its applications", 3rd edition, McGraw-Hill, 2000.
- [12] Y. Censor, "Finite serie expansion reconstruction methods", *In proc. of IEEE*, volume 71, pp 409-419, 1983.
- [13] M. Cetin, and W. C. Karl, "A statistical tomographic approach to synthetic aperture radar image reconstruction", *Proceedings of IEEE Conference on Image Processing*, vol. 1, pp. 845-848, 1997.
- [14] L.-T. Chang, "A method for attenuation correction in radionuclide computed tomography", *IEEE Transactions on Nuclear Science*, vol. 25, pp. 638-643, 1978.
- [15] M. Cheney, "Tomography problems arising in Synthetic Aperture Radar", *Cotemporary Mathematics*, vol. 278, 2001.
- [16] R. L. Clarke, E. N. Milne and G. Van Dyk, "The use of compton scattered gamma rays for tomography", *Investigate Radiology*, vol. 11, pp. 225-235, May-Jun 1976.
- [17] A. H. Compton. "A quantum theory of the scattering of X-rays by light elements". *Phys. Rev.*, 21(5), pp. 483-502, May 1923.

- 
- [18] A. C. Copeland, G. Ravichandran and M. M. Trivedi, "Localized Radon Transform-Based Detection of Ship Wakes in SAR Images", IEEE O196-2892/95 04.00, 1995.
  - [19] A. M. Cormack, "The Radon transform on a family of curves in the plane", Proceedings of the American Mathematical Society, vol. 83, no. 2, pp. 325–330, October 1981.
  - [20] I. G. Cumming, and S. Li, "Improved Slope Estimation for SAR Doppler Ambiguity Resolution", IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, vol. 44, no. 3, March 2006.
  - [21] L. J. Cutrona, "Synthetic Aperture Radar", in Radar Handbook, second edition, ed. M. Skolnik, McGraw-Hill, New York, 1990.
  - [22] M. Dahlbom, D. C. Yu, S. R. Cherry, A. Chatzioannou and E. J. Hoffman, "Methods for improving image quality in whole body PET scanning", Nuclear Science Symposium and Medical Imaging Conference, vol. 3, pp. 1587 – 1591, 1991.
  - [23] A. Derneryd and A. Lagerstedt, "Novel slotted waveguide antenna with polarimetric capabilities", Proceedings of IGARSS Conference, pp. 2054-2056, Firenze, Italy, 1995.
  - [24] A. Mohammad-Djafari and M. Dinten, "Reconstruction tomographique à partir d'un nombre faible de projections", in Approche bayésienne pour les problèmes inverses, published by Traité IC2, Série traitement du signal et de l'image, Hermès, pp. 297-320, 2001.
  - [25] J. Fawcett, "Inversion of n-spherical averages", SI M J. Appl. Math. Anal. vol. 19, pp. 214-232, 1988.
  - [26] L. Florescu, V. A. Markel and J. C. Schotland, "Inversion formulas for the broken-ray Radon transform", arXiv :1007.4183v1[math-phs], 2010.
  - [27] R. Gordon, "A tutorial on ART", IEEE Trans Nucl Sci., 21, pp. 78–93, 1974.
  - [28] I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, "Tables of Integrals, Series, and Products", Sixth Edition, Academic Press, 2000.
  - [29] P. J. Green, "Bayesian reconstruction from emission tomography data using a modified EM algorithm", IEEE Transactions on Medical Imaging, vol. 9, pp. 84–93, 1990.
  - [30] G. T. Gullberg, J. A. Malko and R. L. Eisner, "Boundary determination methods for attenuation correction in SPECT", Esser P, ed. Emission computed tomography, vol. 8, pp. 33-45, 1983.
  - [31] C. Hamon, "Reconstruction tomographique 3D à partir d'un nombre limité de projections. Application à la reconstruction vasculaire et osseuse", thèse de doctorat, Université de Rennes, 1990.
  - [32] G. Harding, H. Strecker and R. Tischler, "X-ray imaging with compton-scatter radiation", Philips Tech. Rev., vol. 41, pp. 46–59, 1983.
  - [33] M. Hegland and R. S. Anderssen, "A mollification framework for improperly posed problems", Numer. Math., vol 78, pp. 549-575, 1998.
  - [34] H. Hellsten and L.-E Andersson, "An inverse method for the processing of synthetic aperture radar data", Inverse Problems 3, pp. 111-124, 1987.
  - [35] G. T. Herman, "Image reconstruction from projections : the fundamentals of computerized tomography", Academic Press, New York, 1980.
  - [36] M. Hermann, Materials World, vol. 7, no. 10, pp. 616-18, October 1999.

- 
- [37] C. V. Jr. Jakowatz and al., "Spotlight-Mode Synthetic Aperture Radar : A Signal Processing Approach", Kluwer Academic publishers, 1996.
  - [38] P. Jonas and A. K. Louis, "A sobolov space analysis of linear regularization methods for ill-posed problems", J. Inverse Ill-Posed Prob., vol. 9, p. 59-74, 2001.
  - [39] J. Klein, "Inverting the spherical Radon transform for physically meaningful functions", arXiv :math/0307348v1 [vmath.CA], 2003.
  - [40] O. Klein and T. Nishina, "Über die Streuung von Strahlung durch freie Elektronen nach der neuen relativistischen Quantendynamik von Dirac", Z. F. Phys. 52, pp. 11–12, 1929.
  - [41] P. G. Lale, "The examination of internal tissues, using gamma-ray scatter with a possible extension to megavoltage radiography", Physics in Medicine and Biology, vol. 4, pp. 159–167, 1959.
  - [42] K. J. langerberg and al., "Principles of microwave imaging and inverse scattering", EARSel Advances in remote Sensing, 2, pp. 163-168, 1993.
  - [43] F. Le Chevalier, "Radar and Sonar Signal Processing Principles", published by Artech House, 2002.
  - [44] A. K. Louis et P. Maass, "A mollifier method for linear operator equations of the first kind", Inverse Problems, v. 6, p 427-440, 1990.
  - [45] A. K. Louis, "Approximate inverse for linear and some nonlinear problems", Inverse Problems, vol. 12, pp 175-190, 1996.
  - [46] A. K. Louis, M Riplinger and al., "Inversion algorithms for spherical Radon and cosine transform", Inverse Problems, vol. 27, 035015, 2011.
  - [47] H. Maître, and al., "Traitement des images de RSO", Hermes Science Publication, 2001.
  - [48] A. Maze, J. L. Cloirec, R. Collorec, Y. Bizais, P. Briandet and P. Bourguet, "Iterative reconstruction methods for nonuniform attenuation distribution in SPECT", J Nucl Med, vol. 34, pp. 1204–1209, 1993.
  - [49] M. I. Miller, D. L. Snyder and T. R. Miller, " Maximum-likelihood reconstruction for single photon emission computed tomography", IEEE Transactions on Nuclear Science, NS-32, pp. 69–778, 1985.
  - [50] T. Moruzi, M. Nakajima, K. Ogawa and S. Yuta, "Attenuation correction methods using the information of attenuation distribution for single photon emission CT", Med. Imag. Tech., vol. 2, pp. 20-28, 1984.
  - [51] M. Morvidone, M. K. Nguyen, T. T. Truong and H. Zaidi, « A novel V-line Radon transform and its imaging applications », International Journal of Biomedical Imaging (IJBI), Special issue on Mathematical methods for Images and Surfaces, (11pp), Vol. 2010, 2010.
  - [52] D. C. Munson and al., "A tomographic formulation of spotlight-mode synthetic aperture radar", Proc. of the IEEE, vol. 71, pp. 917-925, August 1983.
  - [53] K. Muraze et al., "A comparative study of attenuation correction algorithms in single photon emission computed tomography (SPECT)", European Journal of Nuclear Medicine, vol. 13, pp. 55-62, 1987.
  - [54] F. Natterer, "Inversion of the attenuated Radon transform", Inverse Problems 17, pp. 113–119, 2002.

- 
- [55] M. K. Nguyen and T.T. Truong, "On an integral transform and its inverse in nuclear imaging", *Inverse Problems*, vol. 18, pp. 265-277, 2002.
  - [56] M. K. Nguyen and T. T. Truong, "Inversion of a new circular-arc Radon transform for Compton tomography", *Inverse Problems*, vol. 26, 2010.
  - [57] M. K. Nguyen, T. T. Truong, M. Morvidone and H. Zaidi, « Scattered radiation emission imaging : Principles and applications », *International Journal of Biomedical Imaging (IJBI)*, Volume 2011, Article ID 913893, 15 pages, doi : 10.1155/2011/913893, 2011.
  - [58] C. J. Nolan and M. Cheney, "Synthetic aperture inversion", *Inverse Problems*, vol. 18, pp 221-235, 2002.
  - [59] S. J. Norton, "Compton scattering tomography", *Jour. Appl. Phys.*, vol. 76, pp. 2007-2015, 1994.
  - [60] R. Novikov, "An inversion formula for the attenuated X-ray transformation", *Ark. Mat.* 40, pp. 145-167, 2002.
  - [61] J-P. Orvaldez, "Apport de Techniques d'Analyse, de Détection et d'Estimation en Radar et Imagerie SAR", *Habilitation à Diriger des Recherches*, University of Paris-Sud, Onera, 2011.
  - [62] E. T. Quinto, "Helgason's Support Theorem and Spherical Radon Transforms", *Contemporary Mathematics* 464, 2007.
  - [63] J. Radon, "Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten", *Ber. Verh. Sachs. Akad. Wiss. Leipzig-Math. Natur. Kl.* 69, pp. 262-277, 1917.
  - [64] N. J. Redding and G. N. Newsam, "Inverting the Circular Radon Transform", *DSTO Research Report DSTO-RR-0211*, August 2001.
  - [65] N. J. Redding and T. M. Payne, "Inverting the Spherical Radon Transform for 3D SAR Image Formation", *IEEE 0-7803-7871-7/03/ 17.00*, 2003.
  - [66] G. Rigaud, M. K. Nguyen and A. K. Louis, "Novel numerical inversions of two circular-arc Radon transforms in Compton scattering tomography", *Inverse Problems in Science and Engineering*, pp. doi :10.1080/17415977.2011.653008, 2012.
  - [67] C. Roux, "Contribution à l'étude d'un système d'imagerie cardiaque en tomographie axiale transverse par rayon X", *Thèse de doctorat*, INPG, 1980.
  - [68] P. C. Sabatier, "Tomography and Inverse Problems", ed. P. C. Sabatier, pp 471-667, 1987.
  - [69] L. Shepp and Y. Vardi, "Maximum likelihood reconstruction for emission tomography", *IEEE Transactions on Medical Imaging*, MI-1 :113-122, 1982.
  - [70] R. Sloboda, "Vector implementation of Chang's attenuation correction method for single emission computed tomography", *Med. Phys.*, vol. 14, pp. 1045-1047, 1987.
  - [71] J. A. Sorenson, "Quantitative measurement of radioactivity in vivo by whole-body counting", *Instrumentation in nuclear medicine*, vol. 2, pp. 311-348, 1974.
  - [72] S. Surti, R. D. Badawi, C. H. Holdsworth, G. El Fakhri, P. E. Kinahan and J. S. Karp, "A Multi-Scanner Evaluation of PET Image Quality Using Phantom Studies", *Nuclear Science Symposium Conference Record*, vol. 4, pp. 2425 - 2427, 2003.

- 
- [73] M. Szkulmowski, I. Gorczynska, D. Szlag, M. Sylwestrzak, A. Kowalczyk and M. Wojtkowski, "Efficient reduction of speckle noise in Optical Coherence Tomography", *Optics express*, vol. 20, No. 2, 2012.
  - [74] R. W. Todd, J. M. Nightingale and D. B. Everett, "A proposed gamma camera", *Nature*, 251(5471) :132–134, 1974.
  - [75] O. Tretiak and C. Metz, "The exponential Radon transform", *SIAM J. Appl. Math.* 39, no. 2, pp. 341–354, 2002.
  - [76] F. Trèves, "Basic Linear Differential Equations", Academic Press, New York, 1975.
  - [77] L. Triet, R. Chartrand and T. J. Asaki, "A Variational Approach to Reconstructing Images Corrupted by Poisson Noise", *J Math Imaging Vis*, pp. doi : 10.1007/s10851-007-0652-y, 2007.
  - [78] T. T. Truong and M. K. Nguyen, "On new v-line Radon transforms in  $R^2$  and their inversion", *J. Phys. A : Math. Theor.*, vol. 44, pp. 075206, 2011.
  - [79] L. M. H Ulander and H. Hellsten, "A new formula for SAR spatial resolution", *AEU int. J. Electron. Commun.* 50, no. 2, pp. 117-121, 1996.
  - [80] L. M. H Ulander and P.-O. Frölund, "Ultra-wideband SAR interferometry", *IEEE Trans. on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 36 no. 5, pp. 1540-1550, September 1998.
  - [81] T. E. Walters, W. Simon, D. A. Chesler and J. A. Correia, "Attenuation correction in gamma emission computed tomography", *Comput. assist. Tomogr.*, vol. 5, pp. 89-94, 1981.
  - [82] H. Zaidi and K. F. Koral, "Scatter modelling and compensation in emission tomography", *Eur. J. Nucl. Med. Mol. Imaging.*, vol. 31, pp. 761–782, 2004.
  - [83] H. Zaidi, M. Montandon and A. Alavi, "The clinical role of fusion imaging using pet, ct and mri", *Magn. Reson. Imaging Clin. N. Am.*, vol. 18, no. 1, pp. 133–149, 2010.
  - [84] I. G. Zubal, C. R. Harrell, E. O. Smith and A. L. Smith, "Two dedicated software, voxel-based, anthropomorphic (torso and head) phantoms", in *Proceedings of the International Workshop, National Radiological Protection Board, Chilton, UK, July 1995*.